

「海洋波論」 講義ノート
Ocean waves

目次

第 1 章	不規則波の記述	4
1.1	●理屈の前にまずは手作業	4
1.2	●重ね合わせの原理	7
1.3	●確率過程	8
1.4	自己相関関数とモーメントとの関係	11
1.5	●確率変数の変換	12
1.6	確率試行からの Rayleigh 分布関数の導出	17
1.7	極大値の確率分布	21
1.8	海洋波の周波数スペクトル	25
1.9	● $1/N$ 最大波高～上位ランキング群の期待値～	28
1.10	周期の期待値	32
1.11	最高波高の期待値	34
1.12	振幅と周期の結合確率密度	37
1.12.1	周辺化	42
1.12.2	周期の条件付き確率および四分位数	43
第 2 章	不規則波に対する応答	45
2.1	●スペクトルと自己相関関数	45
2.1.1	スペクトル	45
2.1.2	自己相関関数	46
2.1.3	減少型の自己相関関数	51
2.2	モーメント	54
2.3	●線形システム	54
2.3.1	1 自由度振動系をシステムとして見る	54
2.3.2	線形システム理論の一般化	58

2.4	白色雑音の導入と応用	64
第 3 章	波エネルギー	69
3.1	●水波の理論	69
3.1.1	微小振幅波理論の解	70
3.1.2	群速度の数学的導入	76
3.2	●波のエネルギー	79
3.2.1	改めて群速度	82
3.3	●波のパワー	85
3.3.1	輸送定理	85
3.3.2	エネルギーの保存	90
3.3.3	エネルギーの輸送	91
3.3.4	不規則波	93
第 4 章	試験水槽での波	97
4.1	●鉛直 2 次元問題	97
4.1.1	エネルギー保存則	106
4.1.2	Evanescent モードのゆくえ	109
4.1.3	着重点	112
4.2	波力発電の理論	115
4.2.1	立式および解の導出	115
4.2.2	エネルギー収支	119
4.2.3	出力の期待値	124
4.3	●3 次元問題	125
付録 A	本講義で必要となる応用数学、確率統計学の知識	133
補遺 A	加法定理	133
補遺 B	フーリエ級数	134
補遺 C	フーリエ変換	136
補遺 D	四分位数	138
補遺 E	誤差関数と相補誤差関数	138
補遺 E.1	漸近展開	139
補遺 E.2	相補誤差関数の漸近展開	140
補遺 E.3	プラスの方法	140
補遺 F	ガンマ関数	141

補遺 F.1 オイラー定数	143
補遺 G Padé 近似	143
補遺 H 極限定理	145
補遺 H.1 ヨー・モアブル-ラプラスの定理	145
補遺 H.2 中心極限定理	147
補遺 H.3 マルコフ過程	149

はじめに

講義の目標

最初に大目標を示しておく。

少量の知識で難問題の答えを得る姿勢を身につける。

この大目標の達成のために、以下に詳細な小目標を記す。この講義は3年生後期を対象とした専門科目のひとつとして、カリキュラムの中に組み込まれているものである。船舶や海洋構造物、航空機は大気圏および海洋圏という空間のなかで、それぞれの使命を果たすために、移動する、一点に留まるなどの機能を発現しなくてはならない。大気圏や海洋圏では、空気や水などの流体で満たされている。そのため、こうした構造物は流体の中でそれぞれの役割を果たせるように設計され、かつ造られている必要がある。波浪が伝搬する海の表面を航行する船舶は、その影響を受けて動揺（運動）する。凹凸のある路面上を走行する自動車、風の中を飛行する航空機機体はしばしば振動する。このように振動・運動・動揺という形で現れる構造物の応答を極力精確に事前に見積もることがこうした構造物の設計においては不可欠となる。不規則さを特徴とする海洋波を代表例として取り上げ、その性質を知ることが本講義での最初の目標となる。

海を伝搬する波は船の揺れの要因と先述した。船を揺らすことができるということは波の伝搬が船に（力学的な意味で）仕事ができるということだから、生活の中で消費されるエネルギーの源として波を利用するという発想があり得る。波の伝搬とは、水の運動および位置エネルギーとが互いにそのエネルギーをやり取りする現象であると解釈できる。そのやり取りの場に機械仕掛けを挿入することでその一部を吸収する、というのが波力発電の原理である。位置・運動両エネルギーは力学的エネルギーに分類される。発電機内部では電気を発生させる部分を力学的エネルギーでもって駆動することが一般的である。力学的エネルギーを力学的エネルギーに伝達すればよく異種のエネルギー（熱エネルギー等）への変換を要しないため、エネルギーの源が力学的であることは高い変換効率が期待でき、一般的には長所とされる。ただし、変換効率の高さは必ずしもエネルギー需要の満足を意味しないことに注意が必要である。変換される前に、ある程度の「大きさ」をもつエネルギーが高い効率で変換されて初めて有効な技術となるからである。そこで、この講義では水波の

理論を土台として波のエネルギーとパワーを記述する理論を扱い、波が持つエネルギーの大きさを体得することを目標とする。

最後に、限られた知識を活用していく練習として水槽での造波を取り上げる。

事務連絡

講義中に解説する部分を知るには目次を見ていただきたい、冒頭に青丸●が付してある節のみをあつかう。それ以外の節は、講義時間の都合により原則として説明を加えない代わりに自習を要する。

成績はレポート（1回）で評価する（期末試験は実施しない）。毎回、出席を確認する。レポート課題は「テキストに提示されている演習問題に解答せよ」である。青色枠の問題は必須、桃色枠の問題は非必須（解けば加点）である。演習問題は講義で解説する部分としない部分の両方にある。質問は遠慮なく投げかけてほしい。授業支援システムの Q&A、オンライン講義アプリのチャット、e-mail などを活用されたい。

手紙のようなもの

受講者のみなさんへ、講義中ではなかなか伝えにくいことを短めに記します。カリキュラムではこの講義は3年生秋学期の学生を対象に設定されています。本講義の内容は標準的な理工系の大学3年生が、ある程度の熱心さと少しばかりの遊び心を有していれば「充実した」学修となるように編集されています。充実さには個人差がありますからここでいう「充実」とは多くの大学3年生がそれぞれ感じる充実度の期待値のようなものです。わたしは、勉強を通じた充実さは、ある程度以上の難しい課題に対して挑戦し、その「答え」が得られたときに感じられるものであり、また、その答えへと辿りつくために、自分が既に習って知っていることを活用できたと実感できたときその充実さは最も大きくなると思います。ですから、みなさんには大学生でいるうちに、この最大の充実さを感じる機会を一回でも多く得てほしいと思っています。この講義の内容には、新たに知らなければならない知識もちろん含まれますが、「もう習ったこと」を活用あるいは応用することに重きを置いています。「既知概念を想起し、さらに一般化・拡張させること」、この能力を高めてください。少ない知識で多くの問題を解けることが知の本質であり、大学とは元来、そのための練習の場であると思います。海洋波はそのような姿勢で臨むべき典型例です。キャンパスライフを存分に楽しむ大学2年の時期は既に去り大学3年生のいま、その練習を行える最後の時期にあります。学生生活の後半を前向きに過ごす一助となれるように、講義を進めていきます。

この講義ノートはオンライン講義を行うことになったために、わたしのノートに書いてあった手書きメモを突貫工事で電子化したものです。誤記、不備、疑義などが現れると思います。お気づきの際はご連絡下さると幸いです。

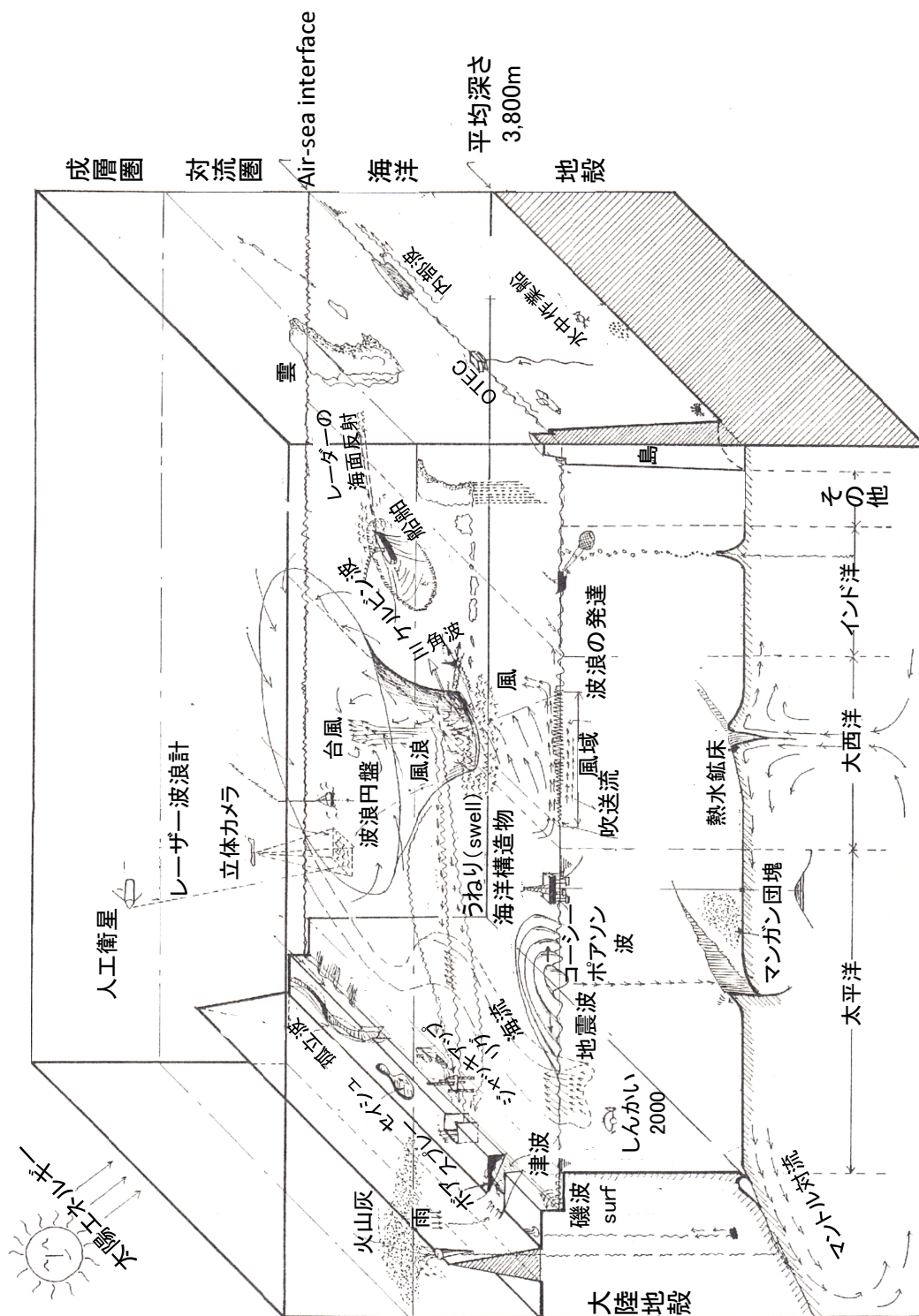


図1 海洋波を含む海洋現象と船舶海洋工学とのかかわりの模式図。

第1章

不規則波の記述

本章のねらい：不規則波形を分析する実験的および理論的手法を知る。重ね合わせの原理の概念をつかむ。不規則波形のもつ統計的性質を確率事象の数え上げという方針で導く。確率の法則（事象の独立性、条件付き確率など）を使って海洋波の統計的性質を把握する方法を習得する。

1.1 ●理屈の前にまずは手作業

不規則なデータ（信号）を処理するための数理的方法を学ぶのに先立って、手作業を通じて実際にデータに触れることにより、不規則データ処理に少し慣れてみることにしよう。

不規則な現象は、横軸に時間を、縦軸に不規則に変動する物理量をとったグラフの形で表示されることが多い。時系列、時刻暦、時間変化といい、座標面上にデータをプロットしてグラフを作成する。このグラフだけを用いて、データがもつ不規則さの統計的性質を引き出すことができる。本節ではゼロアップクロス法（またはゼロダウンクロス法）とよばれる作業の方法を説明する。

グラフを見ると、上下を繰り返す波高の線がゼロの線（時間軸）と何度も交差している（クロスしている）こと、さらに、時間軸を上向きに交差する（ゼロアップクロスする）時刻と下向きに交差する（ゼロダウンクロス）時刻とが交互に現れることに気づかれることと思う。

ゼロアップ時刻かゼロダウン時刻のどちらか一方に注目し、隣り合う交差時刻間の時間の長さと、その時刻間の最大波高・最少波高とを取り出していくのが、ゼロアップクロス法（ゼロダウンクロス法）の作業のほぼすべてである。アップとダウンのどちらに注目するかは気にする必要はなくランダムにどちらかを選べばよい。どちらを選んでも算出される統計値が有効数字の範囲内で同じになっていれば問題ない。

ここでは、ゼロアップクロス法を採用することにして*¹例題を通じて作業手順を述べる。

*¹ ゼロダウンクロス法を採用する場合は、作業説明における「アップ」を「ダウン」、「上向き」を「下向き」に読み替える。

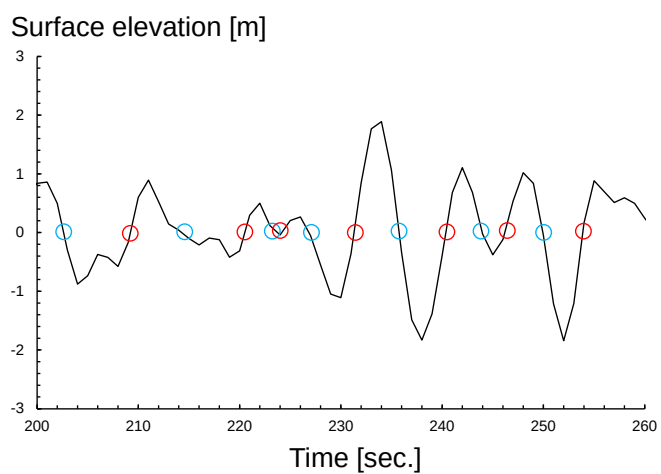
- (1) アップクロス時刻：波高の時系列が上向きに時間軸と交差しているすべての時刻を読みとり時刻の早い方から順番に記録していく。
- (2) 隣り合うアップクロス時刻の差：あるアップクロス時刻から、その次のアップクロス時刻までの時間区間の長さを計算する。第 i 番目 (i は自然数) の区間の長さを、 T_i と表すことにする。
- (3) 時間区間内の最大と最小：第 i 番目の区間における波高時系列を観察し、その中の最大値と最小値とを読みとる。ひとつの区間が隣り合うゼロクロス時刻にはさまれているから、最大値は 0 以上、最小値は 0 以下となるはずである。
- (4) 時間区間内の波高：第 i 番目の区間の最大値から最小値を引き、それを記録する。第 i 番目区間の波高とし H_i と表すことにする。
- (5) H_i ランキングの決定： H_i の大きい順に、区間に順位付けする。
- (6) 上位 $1/N$ ：(5) で決めた H_i 順位をもとに上位 $1/N$ (N は 1 以上の整数) の区間における H_i と T_i とを拾い、 H_i と T_i の平均値 (それぞれ $\bar{H}$ 、 $\bar{T}$ と表す) を計算する。

以上でゼロアップクロス法の作業は完了である。計算された $\bar{H}$ 、 $\bar{T}$ をそれぞれ $1/N$ 最大波高、 $1/N$ 最大波周期とよぶ。 N の値として頻繁に用いるのは $N = 3$ であり、この場合に $\bar{H}$ 、 $\bar{T}$ をそれぞれ有義波高、有義波周期という。小さいデータセットを例題として、作業を実践してみよう。表 1.1 は番号 i 、 H_i 、 T_i を整理したものである。このデータセットの場合は、データ総数が 9 個である (もち

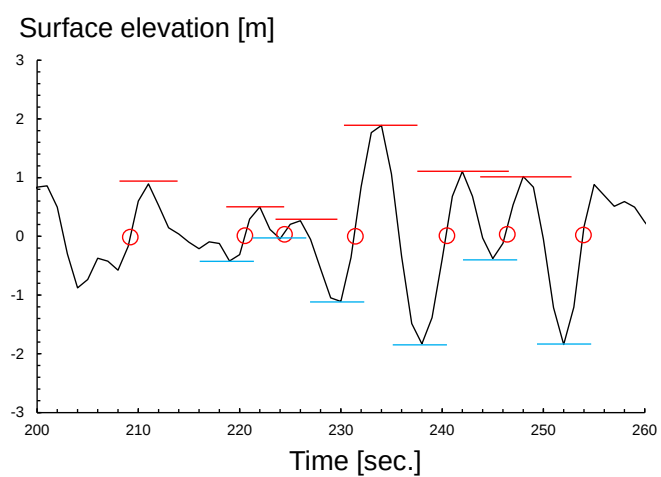
表 1.1 (H_i , T_i) データセットの例。

番号 i	H_i [m]	T_i [sec.]	H_i 順位
1	0.54	4.2	9
2	2.05	8.0	4
3	4.52	6.9	1
4	2.58	11.9	3
5	3.20	7.3	2
6	1.87	5.4	7
7	1.90	4.4	6
8	1.00	5.2	8
9	2.05	6.3	5

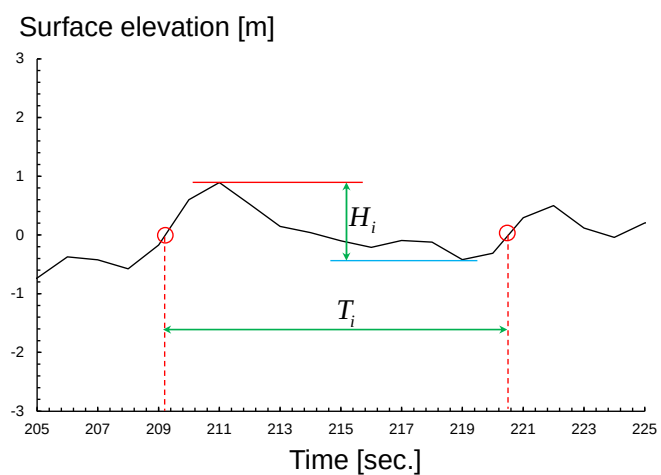
ろん、これは例題のために総数を少なくしている。実務では数百以上の総数を処理する)。上位 $1/3$ に該当する順位は 1 位から 3 位までとなるから、 $i = 3, 5, 4$ に相当する H_i と T_i とを取り出し、そ



(a) ゼロアップクロス (赤丸)、ゼロダウンクロス (青丸) する時刻。



(b) 各区間での最大値と最小値の読みとり。



(c) 区間 i における波高 H_i と周期 T_i の読みとり。

図 1.1

それぞれ平均を計算する。

$$\frac{1}{3} \times (4.52 + 3.20 + 2.58) = 3.43 \text{ m} \equiv \bar{H}, \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{3} \times (6.9 + 7.3 + 11.9) = 8.7 \text{ sec.} \equiv \bar{T}. \quad (1.2)$$

以上より、「計測した波の有義波高は 3.43 m、その周期は 8.7 秒である」と結論付けられる。

演習問題 1-1.

別紙の波形データにゼロアップクロス法あるいはゼロダウンクロス法を適用し、有義波高と有義波周期とを求めよ。表 1.1 と同様の表も作成すること。

1.2 ●重ね合わせの原理

不規則波の統計的性質に関する理論を説明する。ここで基礎となるのは「重ね合わせの原理」と呼ばれるものである。時刻暦データを時間の関数 $\eta(t)$ と書き、それを重ね合わせの原理を用いて表現したものが (1.3) である。この式を丁寧に観察していくことを通じて数式理解の練習をしよう。右辺にある総和をとる記号 $\sum$ が、重ね合わせの演算を意味している。「重ね合わされているもの」は三角関数（cos 関数）である。ここで重要なことは比較的簡単な形をもった関数が、「重ね合わされるもの」として使われている点である*2。

$$\eta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t + \epsilon_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi f_n t + \epsilon_n) \quad (1.3)$$

理論上、上記の総和は n が ∞ になるまで取るが、実際には、無限大の個数の値を足し合わせることは不可能なため、ある有限値 N で置き換える。この置き換えにより上式の等号は厳密には成り立たなくなるが、 N を十分に大きくとることによって $\eta(t)$ の値を要請されている精度の範囲内で近似することができればよい。

$$\eta(t) \doteq \sum_{n=1}^N a_n \cos(\omega_n t + \epsilon_n) = \sum_{n=1}^N a_n \cos(2\pi f_n t + \epsilon_n) \quad (1.4)$$

上の式において n が異なれば三角関数のかたち（周波数、位相）が異なる。これら三角関数の群を足し合わせる際に、左辺の $\eta(t)$ の値の精度を高くするには、 a_n ($n = 1, 2, \dots, N$) の値を適切に定めることが不可欠である。そのために用いるのがフーリエ級数の理論である。 a_n は各三角関数の

*2 他の例としてルジャンドル多項式、チェビシェフ多項式、エルミート多項式、ラゲール多項式などがある。大事なことはこれらが共通して直交性をもつことである。この性質を満たす関数は直交関数系という。

振幅であるから、ある n に対応する三角関数は大きな振幅を持ち（「卓越する」と表現することもある）、それとは異なる n に対応する三角関数は小さな振幅を持つことになる。

演習問題 1-2.

(1.3) と (1.4) に出てくる ω_n と f_n とは両方とも「周波数」だが、まったく同じ量ではない。両者の違いを説明せよ。

1.3 ●確率過程

確率過程（stochastic process）とは確率的に変動する量の時間変化のことである。サイコロを一回投げるのは確かに確率事象であるが確率過程ではない。サイコロを投げ続けて出た目を記録していくと確率過程となる。

海洋波を確率過程と見なすところから理論は築かれていく。上で「サイコロの出た目を記録する」と書いたが、その記録はサイコロの出た目が多数並べられた数値のセットである。このように、進行中の確率過程を観察した結果、集められた数値群のことを一般的に標本（アンサンブル）という。

海洋波を観察するために装置を海洋中の複数箇所に設置することもあれば、一か所のみを設置することもある。複数箇所の場合、各観測装置の場所を添え字で表すことにすると、ある時刻 t における波高 $\eta(t)$ のアンサンブルを次の様を書くことにしよう^{*3}。

$$\eta(t) = \{\eta_1(t), \eta_2(t), \dots, \eta_j(t), \dots\} \quad (1.5)$$

計測結果を右辺に中括弧で囲んで書き、それが確率変数 $\eta(t)$ のアンサンブルであることを $\eta(t) =$ の部分が示している、と理解する。例えば、2020 年 8 月 31 日午前 10 時 24 分 32 秒において 3 つの地点で計測された波高のアンサンブルは下記のように記す。

$$\begin{aligned} \eta(2020 \text{ 年 } 8 \text{ 月 } 31 \text{ 日午前 } 10 \text{ 時 } 24 \text{ 分 } 32 \text{ 秒}) = \\ \{ \eta_{\text{横浜沖}}(2020 \text{ 年 } 8 \text{ 月 } 31 \text{ 日午前 } 10 \text{ 時 } 24 \text{ 分 } 32 \text{ 秒}), \\ \eta_{\text{千葉沖}}(2020 \text{ 年 } 8 \text{ 月 } 31 \text{ 日午前 } 10 \text{ 時 } 24 \text{ 分 } 32 \text{ 秒}), \\ \eta_{\text{品川沖}}(2020 \text{ 年 } 8 \text{ 月 } 31 \text{ 日午前 } 10 \text{ 時 } 24 \text{ 分 } 32 \text{ 秒}) \} \end{aligned} \quad (1.6)$$

標本を集めることができれば、確率変数の代表値を計算することができ、また確率分布を定めることができる。海洋波の代表値/確率分布に関する理論では、理論の単純化のために 3 つの仮定を導入する。

^{*3} 大学で習う数学系科目が、高校数学に比べて難しく感じる理由のひとつに抽象度の高さがある。このようなアンサンブルの書き方もその例のひとつ。それに慣れるためには、抽象度を下げるのが有効で、そのためには (1.6) のように文字に具体的な数値や場所を代入してみる方法がある。

1 個目の仮定は定常性 (stationarity) とよばれる。代表値の中で最も多用する平均 $\bar{m}$ に対して適用され、次の様に表現される。

$$E[\eta(t)] = E[\eta(0)] \equiv \bar{m}, \quad -\infty \leq t \leq \infty. \quad (1.7)$$

第 1 式は時刻 t における平均は、時刻 0 における平均と同じであることを意味する。第 2 式 $-\infty \leq t \leq \infty$ は、第 1 式が過去から未来までのどんな時刻でも成り立つことを意味する。よって平均はいつ計測しても同じである、と換言される。

平均に対して適用されるのと同様に仮定が自己相関関数 $C_{\eta\eta}(\tau)$ に対しても適用され次の様に表される。

$$E[\eta(t)\eta(t+\tau)] = E[\eta(0)\eta(\tau)] \equiv C_{\eta\eta}(\tau), \quad -\infty \leq t \leq \infty. \quad (1.8)$$

上で、期待値を計算する演算記号として E (expectation) を用いた。平均 $\bar{m}$ は以下の様に計算さ

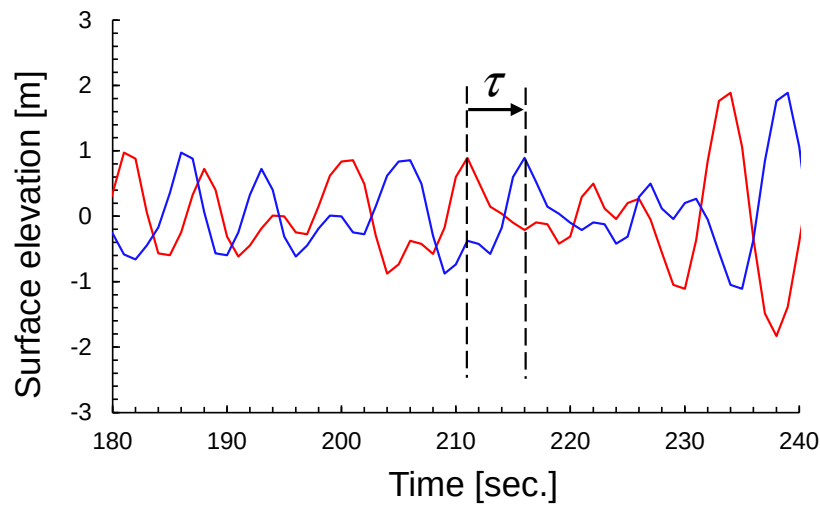


図 1.2 波高時刻歴の自己相関。赤い時刻歴と青い時刻歴は同一のものであるが、 τ だけ時間のずれ (ラグ) がある。

れる。添え字 j について和を取っているから空間平均を表している。

$$E[\eta(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \eta_j(t). \quad (1.9)$$

同様に、自己相関関数の計算も次式のように空間平均として実行される。

$$E[\eta(t)\eta(t+\tau)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \eta_j(t)\eta_j(t+\tau). \quad (1.10)$$

確率過程は時間変化であるから、ある一つの場所に置かれた計測器は時系列を出力する。その時系列から平均（時間平均）を求めることもできるはずである。平均および自己相関関数の時間平均はそれぞれ次式の様に計算される。

$$\overline{\eta_j(t)} \equiv \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \eta_j(t') dt', \quad (1.11)$$

$$\overline{\eta_j(t)\eta_j(t+\tau)} \equiv \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \eta_j(t')\eta_j(t'+\tau) dt' \quad (1.12)$$

ここで次に示す二つ目の仮定を導入する。

$$E[\eta(t)] = \overline{\eta_j(t)}, \quad (1.13)$$

$$E[\eta(t)\eta(t+\tau)] = \overline{\eta_j(t)\eta_j(t+\tau)}. \quad (1.14)$$

これは、空間平均が時間平均と同じであることを意味する。多数のサイコロを同時に一度振ったときの出た目の期待値と、一つのサイコロを多数回振り続けたときの出た目の期待値とは同じという意味である。この仮定のことをエルゴード性（ergodicity）という（筆者の知る限りの確な日本語訳はない）。統計値が現象の真の姿を表すようにするには、多くの場所で長時間にわたってデータを獲得することが望ましいが、多くの場合その作業は困難である。この仮定を認めることで、計測がたとえ1か所しかなくても十分に長時間実行すれば、あるいは、計測が短時間であっても十分に多くの場所で実施すれば、そこから得られる計測結果をもとに算出された統計値を、次に述べるような確率分布を定めるために用いることができる。

3つ目の仮定は、確率事象が正規分布（ガウス分布）にしたがうことである。平均が $E[\eta]$ 、分散が m_0 である正規分布関数 $p(\eta)$ にしたがう確率は次の様に書ける。

$$p(\eta)d\eta = \frac{1}{(2\pi m_0)^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{(\eta - E[\eta])^2}{2m_0} \right\} d\eta. \quad (1.15)$$

ここで分散 m_0 は次の定義式*4および計算式をもつ。

$$m_0 \equiv E[(\eta - E[\eta])^2] \quad (1.16)$$

$$= E[\eta^2] - \{E[\eta]\}^2 \quad (1.17)$$

$$= \eta_{\text{rms}}^2, \text{ if } E[\eta] = 0, \quad (1.18)$$

“rms” は root-mean square（二乗平均平方根）であることを表す。

*4 この資料では原則として“=”は「左辺と右辺とが等しい」ことを意味し、“≡”は「定義（言葉で表現された物理量の数学的表現、あるいは数学的表現の別の文字による表現）」を意味するものとして使う。

1.4 自己相関関数とモーメントとの関係

上式で用いた文字 m_0 は確率統計学で使われることが多い表現であり、アルファベットの m は moment (モーメント) から来ている。下添え字の数字はモーメントの次数を表している。0 次モーメントは、パワースペクトル $S(f)$ (後述) と次の関係にある。 f は周波数である。

$$m_0 = \int_0^\infty S(f) df. \quad (1.19)$$

自己相関関数とモーメントとの関係を導出する。後々のために 4 階微分まで、その計算過程まで含めてここで説明しておく。自己相関関数 $C_{\eta\eta}(\tau)$ を τ で 1 階微分する。

$$\begin{aligned} C'_{\eta\eta}(\tau) &= \frac{d}{d\tau} E[\eta(t)\eta(t+\tau)] \\ &= E[\eta(t)\eta'(t+\tau)] \end{aligned} \quad (1.20)$$

と書ける。また、定常性の仮定により $C_{\eta\eta}(\tau)$ を $E[\eta(t-\tau)\eta(t)]$ と書いても同じことであるから、

$$\begin{aligned} C'_{\eta\eta}(\tau) &= \frac{d}{d\tau} E[\eta(t-\tau)\eta(t)] \\ &= -E[\eta'(t-\tau)\eta(t)] \end{aligned} \quad (1.21)$$

とも書ける。(1.20) および (1.21) は変位と速度との相互相関関数が変位の自己相関関数の 1 階微分と関連付けられることを示している。

自己相関関数 $C_{\eta\eta}(\tau)$ を τ で 2 階微分してみると、

$$\begin{aligned} C''_{\eta\eta}(\tau) &= \frac{d}{d\tau} E[\eta(t)\eta'(t+\tau)] \\ &= \frac{d}{d\tau} E[\eta(t-\tau)\eta'(t)] \\ &= E[-\eta'(t-\tau)\eta'(t)] = -E[\eta'(t-\tau)\eta'(t)] \end{aligned} \quad (1.22)$$

となる。これは、 $\eta(t)$ の 1 階微分の自己相関関数にマイナス符号をつけたものが $\eta(t)$ の自己相関関数の 2 階微分に等しいことを示している。

自己相関関数 $C_{\eta\eta}(\tau)$ の τ に関する 3 階微分は、

$$\begin{aligned} C'''_{\eta\eta}(\tau) &= \frac{d}{d\tau} \{-E[\eta'(t)\eta'(t+\tau)]\} \\ &= -E[\eta'(t)\eta''(t+\tau)] \end{aligned} \quad (1.23)$$

と書ける。上述と同じ理由で、 $C''_{\eta\eta}(\tau)$ を $-\mathbf{E}[\eta'(t-\tau)\eta'(t)]$ と書いても同じことであるから、

$$\begin{aligned} C'''_{\eta\eta}(\tau) &= \frac{d}{d\tau} \{-\mathbf{E}[\eta'(t-\tau)\eta'(t)]\} \\ &= \mathbf{E}[\eta''(t-\tau)\eta'(t)] \end{aligned} \quad (1.24)$$

とも書ける。(1.23) および (1.24) は速度と加速度との相互相関関数が変位の自己相関関数の3階微分と関連付けられることを示している。

自己相関関数 $C_{\eta\eta}(\tau)$ の τ に関する4階微分は次の通り計算される。

$$\begin{aligned} C''''_{\eta\eta}(\tau) &= \frac{d}{d\tau} \{-\mathbf{E}[\eta'(t)\eta''(t+\tau)]\} \\ &= -\frac{d}{d\tau} \mathbf{E}[\eta'(t-\tau)\eta''(t)] \\ &= -\mathbf{E}[-\eta''(t-\tau)\eta''(t)] = \mathbf{E}[\eta''(t-\tau)\eta''(t)]. \end{aligned} \quad (1.25)$$

1.5 ●確率変数の変換

重ね合わせの原理の式 (1.3) においては確率変数は、1 から ∞ まで動く n に対して a_n 、 ω_n (あるいは f_n)、 ϵ_n であり非常に多数である。これらすべての確率分布関数を構築していくことは一般的に非常に複雑になるため、確率変数を変換することで取り扱う変数の個数を減らすことを検討する。

f_n は第 n 番目の基本波 (素成波ということもある) の周波数である。 n の変化にともなって f_n は色々な値を取り得る。とはいえ、 f_n の値が完全に無秩序に決まるか? という問いに対しては、そんなことはないという回答になる。 f_n のアンサンブルの平均値 $\bar{f}$ があり、その平均値から大きく外れる f_n はそんなに多くないという事実がある (後節の波の周波数スペクトルの説明を参照)。このことを踏まえて、 f_n を次の様に書いてみる。

$$f_n = \bar{f} + \underbrace{(f_n - \bar{f})}_{\text{平均値からのずれ}}. \quad (1.26)$$

加法定理^{*5}を用いると、(1.3) は次の様に書き換えられる。

$$\eta(t) = Y_c \cos 2\pi \bar{f} t - Y_s \sin 2\pi \bar{f} t. \quad (1.27)$$

ここで、 Y_c と Y_s とが新たに導入される確率変数であり、それぞれ次の様に定義される。

$$Y_c \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \{2\pi(f_n - \bar{f})t + \epsilon_n\}, \quad (1.28)$$

$$Y_s \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \{2\pi(f_n - \bar{f})t + \epsilon_n\}. \quad (1.29)$$

^{*5} 念のため巻末に証明を記しておく。

すべての n に対する a_n 、 ω_n (あるいは f_n)、 ϵ_n を含む関数の和の形で Y_c 、 Y_s が定義されている。多数の確率変数の過程を内在した (繰り込んだ) 新たな確率変数と見なせる。この変形の結果、確率変数を2つに削減できた。

Y_c と Y_s とは互いに独立であり、

$$E[Y_c Y_s] = 0, \quad (1.30)$$

また同じ分散をもつ。

$$E[Y_c^2] = E[Y_s^2] = E[\eta^2] \equiv m_0. \quad (1.31)$$

演習問題 1-3.

$E[Y_c Y_s] = 0$ を証明せよ。

Y_c 、 Y_s がそれぞれ正規分布にしたがうこと (先述した仮定3つ目)、および独立性と考慮するとこの両者の結合確率密度関数は次の様に書ける。

$$p(Y'_c, Y'_s) dY'_c dY'_s = \frac{1}{2\pi m_0} \exp\left(-\frac{Y'^2_c + Y'^2_s}{2m_0}\right) dY'_c dY'_s. \quad (1.32)$$

左辺の $p(Y'_c, Y'_s) dY'_c dY'_s$ は、 Y_c 、 Y_s がそれぞれ

$$\begin{cases} Y'_c \leq Y_c \leq Y'_c + dY'_c \\ Y'_s \leq Y_s \leq Y'_s + dY'_s \end{cases} \quad (1.33)$$

を満たす領域の値をとる確率である。

Y_c 、 Y_s は独立な変数として時間変化する。この時間変化は (Y_c, Y_s) 座標面上の不規則な線として表現される。ある時刻での点 (Y_c, Y_s) の位置と原点との距離が、その瞬間における「振幅」に相当し、点 (Y_c, Y_s) と原点とをむすぶ線分が Y_c 軸となす角がその瞬間の「位相」に相当する。振幅 R に関する確率分布を導くために極座標 (R, ϕ) を導入し、確率変数を (Y_c, Y_s) から (R, ϕ) に変換する。 (R, ϕ) と (Y_c, Y_s) との関係は下記の通りである。

$$R = \sqrt{Y_c^2 + Y_s^2}, \quad (1.34)$$

$$\tan \phi = \frac{Y_s}{Y_c}. \quad (1.35)$$

演習問題 1-4.

Y_c 、 Y_s を R と ϕ とを用いて表せ。

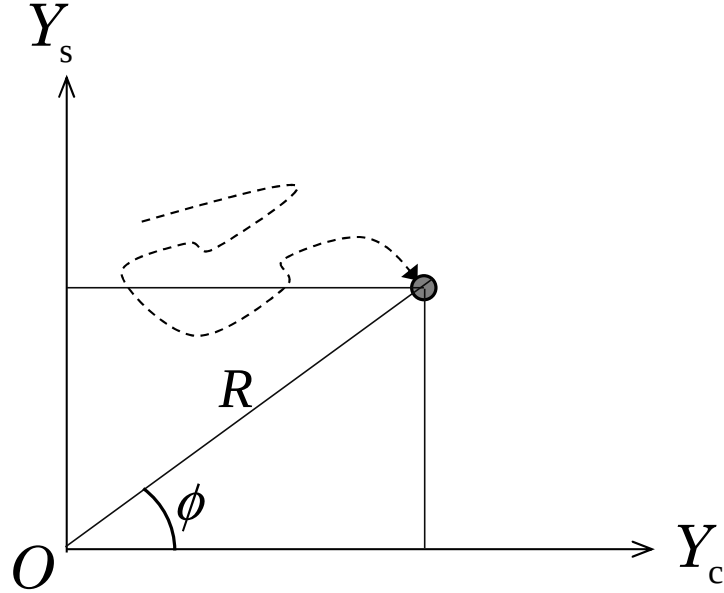


図 1.3 (Y_c, Y_s) 座標と極座標との関係。点線は時間とともに確率的に変動する様子を示す。

確率変数の変換前後における確率密度関数の関係は*6、

$$p^*(R, \phi) dR d\phi = p(Y_c(R, \phi), Y_s(R, \phi)) R dR d\phi \quad (1.40)$$

*6

$$p^*(R, \phi) = p(Y_c, Y_s) \det \left[\frac{\partial(Y_c, Y_s)}{\partial(R, \phi)} \right], \quad (1.36)$$

$$\text{ヤコビアン (Jacobian)} J(R, \phi) \equiv \det \left[\frac{\partial(Y_c, Y_s)}{\partial(R, \phi)} \right] = \begin{vmatrix} \cos \phi & -R \sin \phi \\ \sin \phi & R \cos \phi \end{vmatrix} = R.$$

あるいは、次のように計算してもよい。変換前の変数を x_j ($x_1 = Y_c, x_2 = Y_s$) と書き、変換後の変数を q_j ($q_1 = R, q_2 = \theta$) と書くことにする。

$$h_j = \sqrt{h_{jj}} = \sqrt{\sum_l \left(\frac{\partial x_l}{\partial q_j} \right)^2} \quad (1.37)$$

を定義すると、 $h_1^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ 、 $h_2^2 = (-R \sin \theta)^2 + (R \cos \theta)^2 = R^2$ である。 (x_1, x_2) 系の微小体積と、それに対応する (q_1, q_2) 系の微小体積との関係は次の通りである。

$$dx_1 dx_2 = h_1 h_2 dq_1 dq_2, \quad (1.38)$$

すなわち

$$dY_c dY_s = R dR d\theta. \quad (1.39)$$

$h_1 h_2 = |J|$ という関係になっていることに注意されたい。

であるから、 (R, ϕ) の確率密度関数 $p^*(R, \phi)$ は次のように表せる。

$$p^*(R, \phi) dR d\phi = \frac{R}{2\pi m_0} \exp\left(-\frac{R^2}{2m_0}\right) dR d\phi. \quad (1.41)$$

さて、振幅 R と位相 ϕ とは互いに独立であるので、次式のように、 $p^*(R, \phi)$ は R のみに依存する確率密度関数 $p_R(R)$ と ϕ のみに依存する確率密度関数 $p_\phi(\phi)$ との積で書ける。

$$p^*(R, \phi) dR d\phi = p_R(R) dR \times p_\phi(\phi) d\phi. \quad (1.42)$$

また (1.41) の右辺には位相 ϕ が含まれておらず、 ϕ がどのような確率分布をもつかについての情報はない（ベイズ統計学においては無情報 non-informative とよばれる）ので、 ϕ はその取りうる値の範囲 $[0, 2\pi]$ 内で一様な分布

$$p_\phi(\phi) d\phi = \frac{1}{2\pi} d\phi \quad (1.43)$$

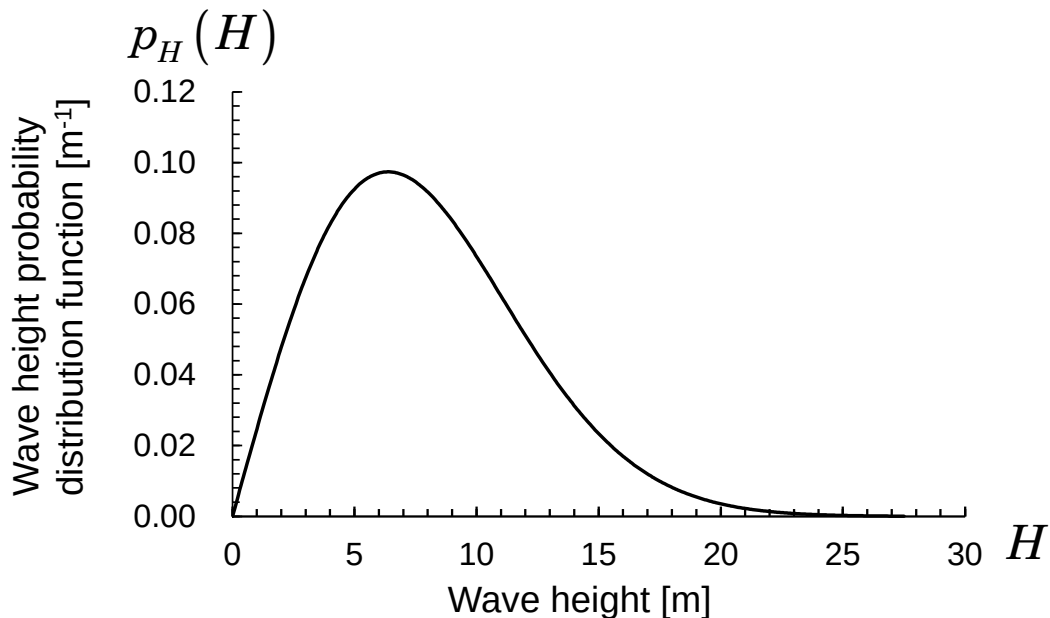
をもつと仮定する。

(1.42)-(1.43) を用いると、振幅の確率分布 $p(R)$ は次の様に書ける。

$$p_R(R) dR = \frac{R}{m_0} \exp\left(-\frac{R^2}{2m_0}\right) dR, \quad (1.44)$$

ここで、もう一度重ね合わせの原理に立ち帰ろう。実現される波 $\eta(t)$ は多くの周波数 f_n からなる基本波の重みつき足し合わせによって表現できるのであった。さらに、多くの f_n の値がそれらの平均 $\bar{f}$ からそれほど離れていない（狭帯域 narrow band）という仮定を施した。この仮定下では、 R は基本波の周期にくらべて非常に長い時間をかけてゆるやかに変動する。このような波の波形は、周波数が $\bar{f}$ でほぼ一定な三角関数で近似できる。このとき波高 H （波高の定義はゼロアップクロス法の節を参照）と R とは $H = 2R$ という関係が近似的に成り立つと考えてよい。この関係を用いて波高の確率分布を求めると次式を得る。

$$\begin{aligned} p_H(H) dH &= P_R\left(R = \frac{H}{2}\right) = \frac{H/2}{m_0} \exp\left\{-\frac{(H/2)^2}{2m_0}\right\} d\left(\frac{H}{2}\right) \\ &= \frac{H}{4m_0} \exp\left(-\frac{H^2}{8m_0}\right) dH. \end{aligned} \quad (1.45)$$

図 1.4 波高の確率密度関数。 $m_0 = 10.0 \text{ m}^2$

「 $p^*(R, \phi)$ は $p(Y_c, Y_s)$ を変換しただけだから、 $p(Y_c, Y_s) = p^*(R, \phi)$ ですか？」

本節の学修を進めるうえでの注意を一点記しておく。確率密度は確率の「密度」であって確率そのものではない、という点である。確率密度 $p(Y_c, Y_s)$ を例とする。確率を % (パーセント) で表示すると、この確率密度の次元は、

$$[\%/m^2]$$

であり、分母に面積の次元をもつ m^2 が含まれる。あえて言葉で表現すれば「単位面積当たりのパーセントの大きさ」である。分母の面積は (Y_c, Y_s) 座標面上での面積である。 $p(Y_c, Y_s)$ から % を計算するためには、その面積を掛けなくてはならない。その掛ける量が $dY'_c dY'_s$ である。その掛け算の結果、

$$p(Y_c, Y_s) dY_c dY_s$$

という大きさの確率が得られる。この資料で確率密度関数をふくむ式を表示するときは原則として、両辺の次元を確率のもの（すなわち %）で統一するように、 dY_c 、 dY_s 、 dR 、 $d\phi$ などの確率変数の微小変化量を両辺に記している。

演習問題 1-5.

$p^*(R, \phi)$ の次元を記せ。そのうえで、

$$p(Y_c, Y_s) = p^*(R, \phi)$$

が成立しないことを説明せよ。上式を (1.40) と比較し、違いを述べよ。

1.6 確率試行からの Rayleigh 分布関数の導出

前節における Rayleigh 分布関数の導出は、波高が無数の正弦波の重ね合わせで表現されること (1.3) を出発点としている。余弦成分の振幅 Y_c と正弦成分の振幅 Y_s とを互いに独立な2つの確率変数と見なし、これらの結合確率密度関数から Rayleigh 分布を導いた。 Y_c (1.28) と Y_s (1.29) が確率変数と見なせるのは、素成波 (cos などの三角関数で表せる波) の振幅 a_n および位相 ϵ_n がランダムに変動すると見なせるからである。したがって本来は a_n と ϵ_n の確率分布を想定してから波高の確率分布への検討へと移行するべきであるが、前節ではそうした考察を飛ばし Y_c と Y_s の正規性を天下一の的に仮定した。本節では、この2つの変数の確率変数としての性質を少し異なった取扱い方をすることで、改めて Rayleigh 分布関数について考えてみる。

議論を単純化するために、 a_n はすべての n に対して1で一定とする。また、 ϵ_n は、本来は0から 2π までの範囲の任意の値を取りうる連続変数であるが、ここでは、0 か π の二値関数とし、すべての素成波の位相は同位相か逆位相かのどちらかとする。

以上の仮定のもとで N 個の素成波の位相を「同」か「逆」のどちらかにランダムに決めていくことにする。同位相波の個数と逆位相波の個数との合計は N である。「同」になるか「逆」になるかは同様に確からしいとすると、「同」も「逆」も個数は $N/2$ 程度になると期待される。「同」の個数勘定 (計数、counting) には、 $\sqrt{N/2}$ 程度の標準偏差 (計数誤差) があると考えてよい。個数を標準偏差 $\sqrt{N/2}$ で割った規格化した個数 (以下、規格化個数) の座標軸上で、規格化した期待値 ($\sqrt{N/2} = N/2/\sqrt{N/2}$) のまわりの幅 2τ の区間

$$\left[\sqrt{\frac{1}{2}N} - \tau, \sqrt{\frac{1}{2}N} + \tau \right] \quad (1.46)$$

を考え、「同」の規格化個数がこの区間内の値をとる確率を考える。

なお、上記区間は規格化しない個数の座標軸上では、

$$\left[\frac{1}{2}N - \tau\sqrt{\frac{1}{2}N}, \frac{1}{2}N + \tau\sqrt{\frac{1}{2}N} \right] \quad (1.47)$$

である。「同」の個数が最大値 $\frac{1}{2}N + \tau\sqrt{\frac{1}{2}N}$ を取るとき、「逆」の個数は最小値 $\frac{1}{2}N - \tau\sqrt{\frac{1}{2}N}$ を取り、重ね合わせの原理より、このとき複素振幅^{*7}は $2\tau\sqrt{N/2}$ となる。また、「同」が最小値、「逆」

^{*7} 複素振幅 (complex amplitude) : 波を下記のように複素数表示したとき、 a_n^* を複素振幅とよぶ。

$$a_n e^{i(\omega t + \epsilon_n)} = a_n e^{i\epsilon_n} e^{i\omega t} = a_n^* e^{i\omega t}, \text{ where } a_n^* \equiv a_n e^{i\epsilon_n}. \quad (1.48)$$

位相の情報を含んだ振幅という意味をもつ。今考えている事象では、「同」は $e^{i\epsilon_n} = 1$ 、「逆」は $e^{i\epsilon_n} = -1$ である。

が最大値をとるとき、複素振幅は $-2\tau\sqrt{N/2}$ である。したがって、個数区間 (1.47) に対応する複素振幅の区間は、

$$\left[-2\tau\sqrt{N/2}, 2\tau\sqrt{N/2}\right] \quad (1.49)$$

であり、複素振幅の二乗値（パワーに比例する量）は、 $2\tau^2 N$ である。

「同」の規格化個数が次の幅 $\delta\tau$ の区間の値をとる確率を考える。

$$\left[\sqrt{\frac{1}{2}N} + \tau, \sqrt{\frac{1}{2}N} + \tau + \delta\tau\right] \quad (1.50)$$

この確率は、誤差が正規分布に従うとすると、

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\tau^2} \delta\tau \quad (1.51)$$

と書ける（誤差関数の定義による）。先と同様の考え方により、規格化個数区間 (1.50) に対応する複素振幅の区間は、

$$[2\tau, 2(\tau + \delta\tau)] \quad (1.52)$$

であり、これを規格化しない複素振幅区間に変換すると、

$$\left[2\tau\sqrt{\frac{N}{2}}, 2(\tau + \delta\tau)\sqrt{\frac{N}{2}}\right] \quad (1.53)$$

である。ここで、 $x = 2\tau\sqrt{\frac{N}{2}} = \sqrt{2N}\tau$ （規格化しない複素振幅）を定義すると、 $\delta x = 2\sqrt{\frac{N}{2}}\delta\tau$ であるから、確率 (1.51) は、

$$\frac{1}{\sqrt{2N\pi}} e^{-\frac{x^2}{2N}} \delta x \quad (1.54)$$

と変換される。

この分布関数を用いて、 x の二乗値（物理的には振動のパワーに比例する量、あるいは統計的には x の分散）を計算してみると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2N\pi}} e^{-\frac{x^2}{2N}} x^2 dx = N \quad (1.55)$$

である。

以上の考察を、二項分布の観点から再び辿ってみる。素成波の位相は「同」か「逆」かの二択というように単純化したため、ベルヌーイ試行を N 回行うことに相当する。したがって、「同」の個数が k になる確率は $B(N, 1/2)$ にしたがって、その確率分布関数は、

$${}_N C_k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{N-k} \quad (1.56)$$

である。この二項分布は N が非常に大きくなると、

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n/2}} e^{-\frac{(x-n/2)^2}{n/2}} \quad (1.57)$$

で近似できる（ド・モアブル-ラプラスの極限定理）。

事象を二項分布でモデル化して得られる分散が、誤差関数を用いて得られる分散（1.55）と一致するかを調べておく。ここで考えている事象では、ベルヌーイ試行のモーメント母関数は

$$\frac{1}{2}e^{t \times 1} + \frac{1}{2}e^{t \times (-1)} = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \quad (1.58)$$

である。このベルヌーイ試行を N 回繰り返す試行のモーメント母関数は (1.58) の N 乗

$$\left\{ \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \right\}^N = \frac{1}{2^N}(e^t + e^{-t})^N \quad (1.59)$$

である。これを t に関して 2 階微分すると

$$\frac{1}{2^N} N \{ (N-1)(e^t + e^{-t})^{N-2}(e^t - e^{-t})^2 + (N-1)(e^t + e^{-t})^N \} \quad (1.60)$$

であり、これに $t = 0$ を代入すると分散（2 次モーメント）が N となる。これは（1.55）と一致する。なお、この分散の計算は、モーメント母関数を導入しなくても次のようにも計算できる。 k を「同」の個数とすると、振幅の値は $N - 2k$ になることに注意すると二乗値の期待値は、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^N} N^2 + \frac{1}{2^N} N(N-2)^2 + \frac{1}{2^N} \frac{N(N-1)}{2 \cdot 1} (N-4)^2 + \dots \\ &= \frac{1}{2^N} \left\{ \frac{d^2(e^{Nt})}{dt^2} \Big|_{t=0} + N \frac{d^2(e^{(N-2)t})}{dt^2} \Big|_{t=0} + \frac{N(N-1)}{2 \cdot 1} \frac{d^2(e^{(N-4)t})}{dt^2} \Big|_{t=0} + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{2^N} \frac{d^2}{dt^2} \left\{ (e^{Nt}) + N(e^{(N-2)t}) + \frac{N(N-1)}{2 \cdot 1} (e^{(N-4)t}) + \dots \right\}_{t=0} \\ &= \frac{1}{2^N} \frac{d^2}{dt^2} \{ (e^t + e^{-t})^N \}_{t=0} \\ &= \frac{1}{2^N} N 2^N = N \end{aligned} \quad (1.61)$$

となる。

ここから前節に沿って、「波高」を確率変数として考えていく。前節において Y_c と Y_s という 2 つの確率変数を定義し、その 2 乗和平方根として振幅 R を定義し、それを 2 倍したものを波高 H と定義した。そこで本節でも 2 つの確率変数を導入し、 x とは独立な y を導入する。ただし、 x 方向の波の個数 $\frac{N}{2} + M$ 、 y 方向の波の個数 $\frac{N}{2} - M$ とし、総数が N である点は、一変数の場合と共通にしておく。このとき x, y の同時確率密度関数は、

$$\frac{1}{\pi(\sqrt{N^2 - 4M^2})} \exp\left(-\frac{x^2}{N + 2M}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{N - 2M}\right) dx dy \quad (1.62)$$

である。

ここで M は、 x 、 y 方向における「同」の個数のもつ、平均値 $\frac{N}{2}$ からのずれである。大数の法則により N が大きくなるにしたがい x 、 y 方向の個数は両方とも $\frac{N}{2}$ に近づくから、 $N \gg M$ の関係を仮定する。また、前節と同様に極座標 (R, θ)

$$x = R \cos \theta \text{ and } y = R \sin \theta \quad (1.63)$$

を導入する。上の同時確率密度関数は次のように変換される。

$$\frac{1}{\pi(\sqrt{N^2 - 4M^2})} \exp\left(-\frac{NR^2}{N^2 - 4M^2}\right) \exp\left(-\frac{2MR^2}{N^2 - 4M^2} \cos 2\theta\right) R dR d\theta. \quad (1.64)$$

いま興味があるのは、振幅 R のみであるので、 θ については、全区間 $[0, 2\pi]$ にわたって積分する（周辺確率を求めることに相当する）。 $N \gg M$ であることを踏まえ、

$$K \equiv \frac{2MR^2}{N^2 - 4M^2} = \frac{2\frac{M}{N}\frac{R^2}{N}}{1 - 4\left(\frac{M}{N}\right)^2} \ll 1 \quad (1.65)$$

を定義し、肩に $\cos 2\theta$ を含む指数関数を次のように $K=0$ のまわりで Taylor 展開し、

$$e^{-\frac{2MR^2}{N^2 - 4M^2} \cos 2\theta} = 1 - \cos 2\theta K + \frac{1}{2} \cos^2 2\theta K^2 - \dots \quad (1.66)$$

そのうえで、 θ に関する積分を実行すると、

$$\int_0^{2\pi} \left(1 - \cos 2\theta K + \frac{1}{2} \cos^2 2\theta K^2 - \dots\right) d\theta = 2\pi \left(1 + \frac{1}{4} K^2 + \dots\right) \quad (1.67)$$

であり、また、

$$N^2 - 4M^2 = N^2 \left(1 - \frac{M^2}{N^2}\right) \simeq N^2 \quad (1.68)$$

であることを用いると

$$2\frac{1}{N} \exp\left(-\frac{R^2}{N}\right) R dR. \quad (1.69)$$

というように Rayleigh 分布と同じかたちの分布関数を得る。

1.7 極大値の確率分布

上記のモデルがなぜ狭帯域の性質をもつモデルとなるのか、改めて考えてみよう。この節の内容は Cartright and Longuet-Higgins (1956) に基づく*8。

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t_0) > 0, \\ \dot{\eta}(t_0 + \Delta t) \simeq \dot{\eta}(t_0) + \ddot{\eta}(t_0)\Delta t, \end{cases} \quad (1.70)$$

ここで $\ddot{\eta}(t_0) \leq 0$ であることを留意する。波高 η が $\eta_0 < \eta \leq \eta_0 + d\eta_0$ の範囲において極大となる

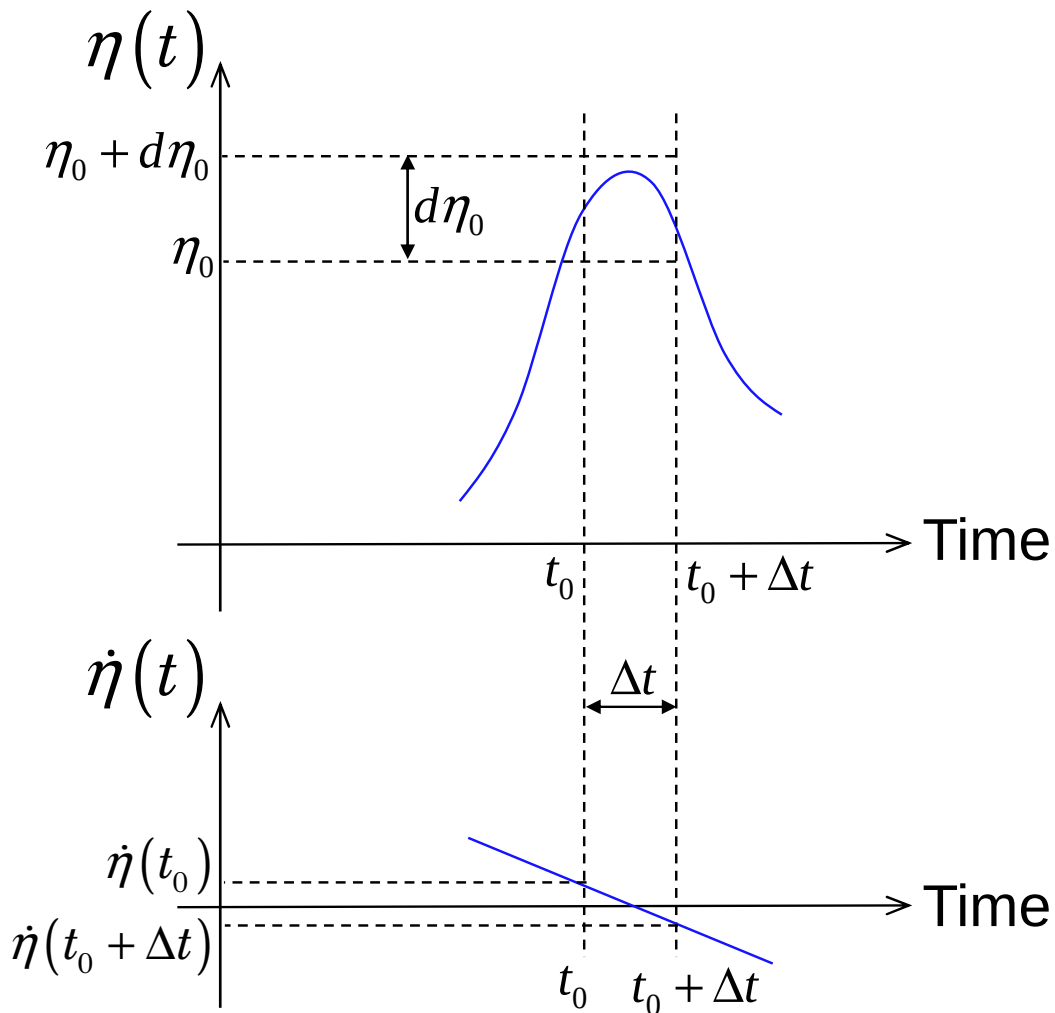


図 1.5

*8 この論文は、使われている数式は複雑であるが、導入されている仮定はシンプルなものである。これらの仮定を駆使することで「極大値の分布則を導く」という目標に到達している。純粋な数学（確率統計学）から、構造物の設計に資する形の式の誘導に成功した画期的な論文であった。

事象を考える（確率密度関数の積分を通じて数える）。

$$\begin{aligned}
 & \int_{\ddot{\eta}=0}^{\ddot{\eta}=-\infty} \int_{\dot{\eta}=-\ddot{\eta}\Delta t}^{\dot{\eta}=0} \left\{ \int_{\eta=\eta_0}^{\eta=\eta_0+d\eta_0} p(\eta, \dot{\eta}, \ddot{\eta}) d\eta \right\} d\dot{\eta} d\ddot{\eta}, \\
 &= \int_{\ddot{\eta}=0}^{\ddot{\eta}=-\infty} \int_{\dot{\eta}=-\ddot{\eta}\Delta t}^{\dot{\eta}=0} \int_{\eta=\eta_0}^{\eta=\eta_0+d\eta_0} p(\eta_0, \dot{\eta}, \ddot{\eta}) d\eta_0 d\dot{\eta} d\ddot{\eta}, \\
 &= \int_{\ddot{\eta}=0}^{\ddot{\eta}=-\infty} \int_{\dot{\eta}=-\ddot{\eta}\Delta t}^{\dot{\eta}=0} \int_{\eta=\eta_0}^{\eta=\eta_0+d\eta_0} p(\eta_0, 0, \ddot{\eta}) d\eta_0 (-\ddot{\eta}\Delta t) d\ddot{\eta},
 \end{aligned} \tag{1.71}$$

単位時間あたりに本事象が発生する回数（「発生率」）の期待値は次のように計算できる。

$$F(\eta_0)d\eta_0 = \int_{\ddot{\eta}=-\infty}^{\ddot{\eta}=0} p(\eta_0, 0, \ddot{\eta}) |\ddot{\eta}| d\eta_0 d\ddot{\eta}. \tag{1.72}$$

単位時間あたりに波高が任意の極大値をとる回数の期待値は、 η_0 が取りうる範囲で (1.72) を積分することで得られる。

$$N_1^* = \int_{\eta_0=-\infty}^{\eta_0=+\infty} \int_{\ddot{\eta}=-\infty}^{\ddot{\eta}=0} p(\eta_0, 0, \ddot{\eta}) |\ddot{\eta}| d\eta_0 d\ddot{\eta} \equiv N_1^*. \tag{1.73}$$

次に、波高変化の速度と加速度を考える。波高の変位が (1.3) のように表現されるのなら速度と加速度は項別微分することで、

$$\dot{\eta}(t) = - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \omega_n \sin(\omega t + \epsilon_n), \tag{1.74}$$

$$\ddot{\eta}(t) = - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \omega_n^2 \cos(\omega t + \epsilon_n) \tag{1.75}$$

と書ける。

確率密度関数 p を $p(\eta, \dot{\eta}, \ddot{\eta})$ と書くのは、 p が 3 つの確率変数 $\eta, \dot{\eta}, \ddot{\eta}$ に依存する確率過程の確率密度（すなわち結合確率密度）を表すからである。この 3 つの確率変数 $\eta, \dot{\eta}, \ddot{\eta}$ は、いずれも正規分布にしたがうと考えてよい（中心極限定理）。なお、いずれも平均値 0 の正規分布である。

この 3 つの確率変数の分散共分散行列は次の通りである。

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \hat{m}_0 & 0 & -\hat{m}_2 \\ 0 & \hat{m}_2 & 0 \\ -\hat{m}_2 & 0 & \hat{m}_4 \end{pmatrix}. \tag{1.76}$$

ここで、 $\hat{m}_l$ は、 l 次モーメントであり

$$\hat{m}_l \equiv \int_0^{\infty} (\omega)^l S(\omega) d\omega = (2\pi)^l \int_0^{\infty} (f_n)^l S(f) df \equiv (2\pi)^l m_l \tag{1.77}$$

と定義される (この定義式後で改めて確認)。0 次モーメントについては $\hat{m}_0 = m_0$ が成り立つことに注意。 m_l を用いると平均周波数 $\bar{f}$ は、

$$\bar{f} = \frac{\int_0^\infty f S(f) df}{\int_0^\infty S(f) df} = \frac{m_1}{m_0} \quad (1.78)$$

と表せる。

以上より確率密度関数は、

$$p(\eta, \dot{\eta}, \ddot{\eta}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}(\hat{m}_2\Delta)^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left\{ \frac{\dot{\eta}^2}{\hat{m}_2} + \frac{1}{\Delta} (\hat{m}_4\eta^2 + 2\hat{m}_2\eta\ddot{\eta} + m_0\ddot{\eta}^2) \right\} \right], \quad (1.79)$$

$$\Delta \equiv \frac{|\mathbf{M}|}{\hat{m}_2} = m_0\hat{m}_4 - (\hat{m}_2)^2. \quad (1.80)$$

多変量正規分布

多変量正規分布 (または k 次元正規分布) は、平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}$ 、分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ が与えられたとき、変数ベクトル $\mathbf{x}$ が次の分布関数に従う多次元分布である。

$$p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\} \quad (1.81)$$

上記の表現式を用いて事象の発生率 $F(\eta_0)$ を計算するための式を導こう。

$$\begin{aligned} F(\eta_0) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}(\hat{m}_2\Delta)^{1/2}} \int_{\ddot{\eta}=-\infty}^{\ddot{\eta}=0} \exp \left[-\frac{1}{2} \left\{ \frac{\dot{\eta}^2}{\hat{m}_2} + \frac{1}{\Delta} (\hat{m}_4\eta^2 + 2\hat{m}_2\eta\ddot{\eta} + m_0\ddot{\eta}^2) \right\} \right] |\ddot{\eta}| d\ddot{\eta} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}(\hat{m}_2\Delta)^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{2}x_0^2 \right) \left\{ \exp \left(-\frac{1}{2\delta}x_0^2 \right) + \frac{x_0}{\delta} \int_{-x_0/\delta}^{+\infty} \exp \left(-\frac{1}{2}x^2 \right) dx \right\}, \end{aligned} \quad (1.82)$$

ここで $x_0 \equiv \frac{\eta_0}{(m_0)^{1/2}}$ 、 $\delta \equiv \frac{\Delta^{1/2}}{\hat{m}_2}$ である。

したがって、 N_1^* は

$$N_1^* = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\hat{m}_4}{\hat{m}_2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{m_4}{m_2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.83)$$

と計算される。

以上で表現式が得られた $F(\eta)$ と N_1^* とを用いて、波高が極大値 η_m をとる確率 $p(\eta_m)d\eta_m$ を次のように計算する。

$$p(\eta_m)d\eta_m = \frac{F(\eta_m)d\eta_m}{N_1^*} \quad (1.84)$$

確率密度関数 $p(\eta_m)$ を無次元変数 $x_* \equiv \frac{\eta_m}{\sqrt{m_0}}$ (長さの次元をもつ η を標準偏差 $\sqrt{m_0}$ で割って規格化した量: いわゆる比である) の関数として表すことにしよう。このとき $d\eta_0 = \sqrt{m_0}dx_*$ であることに注意する。また、パラメータ δ を用いた表現からパラメータ ϵ を用いた表現式へ変換する。その方針のもと、(1.84) に (1.82)、(1.83) を代入すると、 x_* の確率密度関数 p_{x_*} は、

$$\begin{aligned} p_{x_*}(x_*) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left\{ \epsilon \exp\left(-\frac{x_*^2}{2\epsilon^2}\right) + (1-\epsilon^2)^{1/2} x_* \exp\left(-\frac{x_*^2}{2}\right) \int_{-x_* \frac{\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon}}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x_*^2}{2}\right) dx_* \right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left\{ \epsilon \exp\left(-\frac{x_*^2}{2\epsilon^2}\right) + (1-\epsilon^2)^{1/2} x_* \exp\left(-\frac{x_*^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{x_* \frac{\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon}} \exp\left(-\frac{x_*^2}{2}\right) dx_* \right\} \end{aligned} \quad (1.85)$$

と書ける。最後の式変形では積分変数を $x_* \rightarrow -x_*$ と変換している。(1.85) で使われているパラメータ δ は、

$$\epsilon \equiv \frac{\delta^2}{1+\delta^2} = \frac{\Delta}{m_0 \hat{m}_4} = \frac{m_0 m_4 - (m_2)^2}{m_0 m_4} \quad (1.86)$$

と定義される。このパラメータの物理的な意味を考えてみよう。(1.86) の最右端表示式の分子 $m_0 m_4 - (m_2)^2$ をモーメントの定義式 (1.77) にしたがって書いてみると

$$m_0 m_4 - (m_2)^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty S(f_1) S(f_2) \{ (f_2)^4 - (f_1 f_2)^2 \} df_1 df_2 \quad (1.87)$$

となる。 f_1 と f_2 はともに周波数であり積分計算では積分変数である。両者は交換可能なので、 $m_0 m_4 - (m_2)^2$ は

$$m_0 m_4 - (m_2)^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty S(f_2) S(f_1) \{ (f_1)^4 - (f_2 f_1)^2 \} df_2 df_1 \quad (1.88)$$

とも書ける。これら2つの表示式の両辺を足し合わせることで、パラメータ Δ が

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty S(f_1) S(f_2) \{ (f_1)^2 - (f_2)^2 \}^2 df_1 df_2 \quad (1.89)$$

と表せる。Cartright and Longuet-Higgins(1956) は、上式の被積分関数を考察することでパラメータ ϵ に物理的意味を与えた。(1.86) から、

$$0 < \epsilon < 1 \quad (1.90)$$

である。この範囲で ϵ がどの値をとるかによってスペクトルの幅が決まる。幅が狭くなる、すなわち狭帯域 (Narrow band) の場合、パワースペクトル $S(f_1)$ と $S(f_2)$ は、卓越周波数 (f_0 とする) の近傍のみで大きな値を取り、それ以外の周波数帯ではゼロに近い値をとる。また、 f_1, f_2 の範囲

を f_0 近傍のみに限定すると因子 $(f_1)^2 - (f_2)^2$ は微小となる。したがって被積分関数はすべての周波数帯で微小な値をとることになり、その積分値に比例する Δ は微小となる。ゆえに ϵ も微小となる。不等式で表現すると、

$$\epsilon \ll 1 \quad (1.91)$$

である。

(1.85) において極限 $\epsilon \rightarrow 0$ をとると、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} p(x_*) = x_* \exp\left(-\frac{1}{2}x_*^2\right) \quad (1.92)$$

であり Rayleigh 分布を得る^{*9}。

一方、極限 $\epsilon \rightarrow 1$ をとると、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 1} p(x_*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x_*^2\right) \quad (1.93)$$

となり、これは正規分布（ガウス分布）である。

1.8 海洋波の周波数スペクトル

不規則波が伝搬する波浪情報を利用目的として最も重要なものは、船舶や海洋構造物の応答（運動、波力、曲げモーメント等）の推定である。船舶や海洋構造物を「波浪という入力を受け応答（出力）を示すシステム」として見なし、そのシステムが示す線形・非線形応答を確率的に推定するためには、海象を表現する波スペクトルは不可欠である。本来はあるシステムが運用される海域がもつ海象条件に内在する波スペクトルを入手できることが望ましいが、ほとんどの場合それは困難である。したがって色々な海象条件を表現できる、一般性を有する波スペクトルの定式化に対する需要があった。これに応えるかたちで 1950 年初めから多くの波スペクトルの数学的表現式が提案されてきた。その中で Neumann が 1953 年に提示したスペクトル表現式は注目すべきものであった。Neumann は、主に目視による観測データと理論解析とを併用して表現式を作成した。現在では、この式は実用に供されてはいないが、その後の実海域上でのシステム応答予測に関する研究においてお手本の役割を果たした。Neumann 型スペクトルは次のように書ける。

$$S_N(\omega) = 2.4\omega^{-6} \exp\left(-\frac{2g^2}{U^2}\right) [m^2s], \quad (1.94)$$

^{*9} ガウス積分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{c^2}\right) dx = c\sqrt{\pi}$ を用いる。

あるいは

$$S'_N(\omega) = 2.4 \left(\frac{U^2}{2g^2} \right)^3 (\omega')^{-6} \exp \{ -(\omega')^{-2} \} [m^2s], \text{ where } \omega' \equiv \frac{\omega}{\frac{\sqrt{2}g}{U}}. \quad (1.95)$$

ここで、 U は風速、 g は重力加速度である。上式の指数関数の部分は、正の実数 n をふくむ有理関数で近似することができる^{*10}。

$$\exp \{ -(\omega')^{-2} \} \simeq \left\{ \frac{n(\omega')^2}{1 + n(\omega')^2} \right\}^n. \quad (1.99)$$

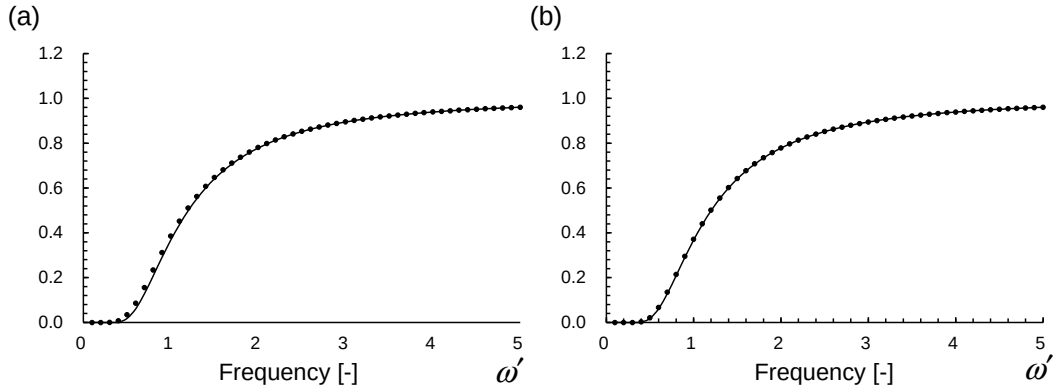


図 1.6 実線は指数関数。点は有理関数近似 ((a) $n=10$, (b) $n=50$)。

本節ではもうひとつ、海洋波スペクトルの型を紹介しておく。現在使用されている表現式のひとつ、Pierson-Moskowitz (P-M) 型スペクトルは次のように表される。

$$S_{PM}(\omega) = \overline{H}^2 \overline{T} S'_{PM} [m^2s], \quad (1.100)$$

$$S'_{PM} \equiv \frac{0.11}{2\pi} \left(\frac{\omega}{2\pi/\overline{T}} \right)^{-5} \exp \left\{ -0.44 \left(\frac{\omega}{2\pi/\overline{T}} \right)^{-4} \right\}, \quad (1.101)$$

^{*10} 実数 x が $x \ll 1$ であるとき、 $\log(1+x)$ の Taylor 展開の 2 次以上の項を微小であるとして無視することにより、

$$\log(1+x) \simeq x \quad (1.96)$$

と近似できる。 $y = \frac{1}{x}$ とおいて変数を変換すると、 $y \gg 1$ であり次の近似式が得られる。

$$\log \frac{y}{1+y} \simeq -\frac{1}{y}. \quad (1.97)$$

ここで、 $y = n\omega^2$ とおく。条件 $y \gg 1$ により、 n はある程度大きな数に設定する。この結果、

$$\log \left(\frac{n\omega^2}{1+n\omega^2} \right)^n \simeq -\omega^{-2} \quad (1.98)$$

であるから、近似式 (1.99) が得られる。

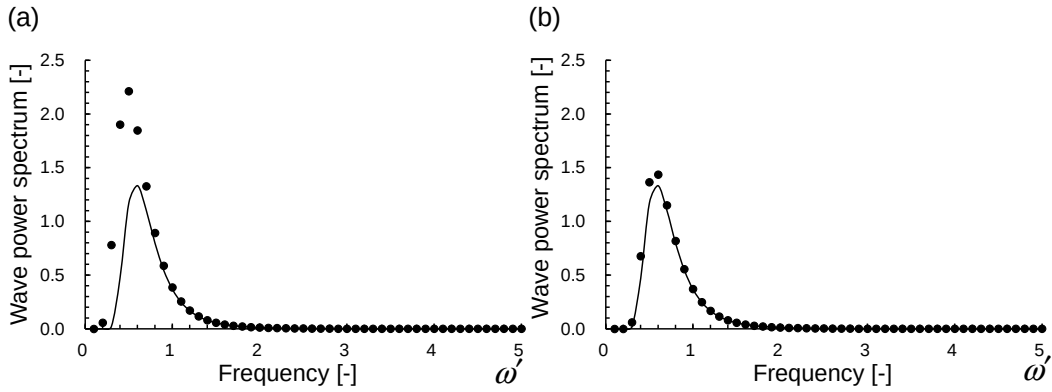


図 1.7 Neumann 型スペクトル分布。点は有理関数近似 ((a) $n=10$, (b) $n=50$)。

ここで、 $\overline{H}$ 、 $\overline{T}$ は有義波高、有義波周期である。P-M 型以外にも、Bretschneider 型、ISSC 型、ITTC 型、JONSWAP 型、Ochi-Hubble 型等がある。これだけ多くの型が提唱されてきた事実は海洋波スペクトルモデルの精度の高さに需要があることを示している。本講義ではすべての型を網羅的に紹介はしないが、興味があれば参考文献にあたっていただきたい。

従来提唱されてきたスペクトルの型はいずれも次の様な一般形で書くことができる。

$$S(\omega) = A\omega^{-a} \exp(-B\omega^{-b}), \quad (1.102)$$

ここで a 、 b は整数、 A 、 B は定数である。この $S(\omega)$ の l 次モーメント $\hat{m}_l$ (1.77) は次の様に計算できる。

$$\hat{m}_l = \int_0^\infty S(\omega) \omega^l d\omega = \int_0^\infty A\omega^{-a+l} \exp(-B\omega^{-b}) d\omega, \quad (1.103)$$

ここで $t = B\omega^{-b}$ とおくと、 $dt = -bB\omega^{-b-1}d\omega$ であるから、

$$\begin{aligned} \hat{m}_l &= -\frac{A}{bB} \int_\infty^0 \left(\frac{B}{t}\right)^{\frac{-a+l}{b}} \left(\frac{B}{t}\right)^{1+\frac{1}{b}} \exp(-t) dt \\ &= \frac{A}{b} B^{\frac{-a+l+1}{b}} \int_0^\infty \exp(-t) t^{\left(\frac{a-l-1}{b}-1\right)} dt \\ &= \frac{A}{b} B^{\frac{-a+l+1}{b}} \Gamma\left(\frac{a-l-1}{b}\right) \end{aligned} \quad (1.104)$$

となる。ガンマ関数の数値が計算できればモーメントを算出できる。

演習問題 1-6.

[1] 有義波高 8m、有義波周期 4sec の場合を考え P-M 型の 0 次モーメントと 1 次モーメントを計算せよ。

[2][1] の結果から、周期の期待値を推定せよ。

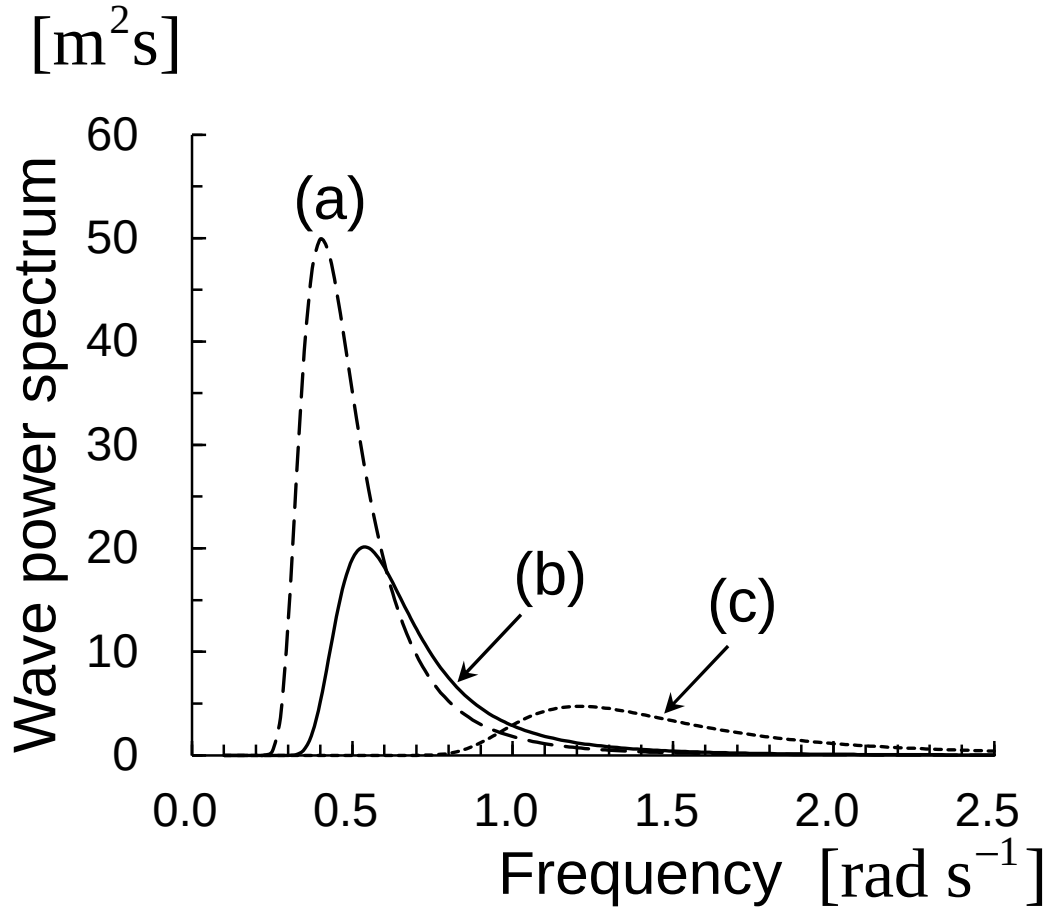


図 1.8 Pierson-Moskowitz 型スペクトル分布 : (a) $(\bar{H}, \bar{T}) = (15\text{m}, 12\text{sec.})$, (b) $(\bar{H}, \bar{T}) = (8\text{m}, 4\text{sec.})$, (c) $(\bar{H}, \bar{T}) = (11\text{m}, 9\text{sec.})$.

1.9 ● 1/N 最大波高～上位ランキング群の期待値～

先の節で導いた波高の確率密度関数を無次元化してみよう。 x を無次元化された波高とし次の様に定義する。

$$x \equiv \frac{H}{\bar{H}}. \quad (1.105)$$

ここで、 $\bar{H}$ は平均波高を表す。 $\bar{H}$ 、および二乗平均 $\overline{H^2}$ は次の様に計算することができる。

$$\bar{H} = \int_0^\infty H p(H) dH = \sqrt{2\pi m_0}, \quad (1.106)$$

$$\overline{H^2} = \int_0^\infty H^2 p(H) dH = 8m_0. \quad (1.107)$$

無次元パラメータ a を標準偏差の平均波高に対する比の逆数として

$$a \equiv \left(\frac{\sqrt{8m_0}}{H} \right)^{-1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (1.108)$$

と定義する。無次元化された確率密度関数を改めて p で表すと、以下のように書ける。

$$p(x)dx = 2a^2 x \exp(-a^2 x^2) dx. \quad (1.109)$$

この確率密度関数を積分する形で定義される累積確率密度関数（非超過確率密度関数 non-exceedance probability）は以下のように表される。

$$P_{\text{NEX}}(x) \equiv \int_0^x p(x') dx'. \quad (1.110)$$

$P_{\text{NEX}}(x)$ は、確率変数が x を超えない確率という意味を持つ。また、確率変数が x を超える確率（超過確率 exceedance probability）は次の様に定義できる。

$$P_{\text{EX}}(x) \equiv \int_x^\infty p(x') dx'. \quad (1.111)$$

また、確率密度関数の定義から、 $P_{\text{NEX}}(x)$ と $P_{\text{EX}}(x)$ は次の関係を満たす。

$$P_{\text{NEX}}(x) + P_{\text{EX}}(x) = 1. \quad (1.112)$$

非超過確率密度関数の形を具体的に求めてみる。積分を実行し、

$$\begin{aligned} P_{\text{NEX}}(x) &= \int_0^x \frac{\pi}{2} x' \exp\left(-\frac{\pi}{4} x'^2\right) dx' \\ &= 1 - e^{-\frac{\pi}{4} x^2} = 1 - e^{-a^2 x^2} \end{aligned} \quad (1.113)$$

を得る。また、超過確率は、

$$P_{\text{EX}}(x) = e^{-\frac{\pi}{4} x^2} = e^{-a^2 x^2} \quad (1.114)$$

となる。

$1/N$ 最大波高は、波高を確率変数とみなしたとき（あるいは、多数の波高からなるデータセットが手もとにあるとき）、その確率変数の上位 $1/N$ のものだけを取り出し、それらの期待値を計算することで求められる。 N は一般的には 1 より大きい実数とおけるが、多くの場合 2 以上の整数である。「上位」の意味は下表の通りである。

数式では、

$$\bar{x}_{1/N} \equiv \frac{\int_{x_{1/N}}^\infty x p(x) dx}{\int_{x_{1/N}}^\infty p(x) dx} \quad (1.115)$$

表 1.2 上位 $1/N$ の意味

N	大きいほうから (上位)
2	50%
3	33%
5	20%
10	10%

のように定義される。ここで積分区間の下端 $x_{1/N}$ は、上位 $1/N$ に入る確率変数 x の最小値であり、非超過確率と以下の関係を有する。

$$1 - \frac{1}{N} = 1 - e^{-\frac{\pi}{4}x_{1/N}^2}. \quad (1.116)$$

この式を解くことで $x_{1/N}$ は

$$\therefore x_{1/N} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(\ln N)^{1/2} \quad (1.117)$$

と求まる。色を付けた部分の面積は、

$$\begin{aligned}
 S_{1/N} &\equiv \int_{x_{1/N}}^{\infty} p(x) dx \\
 &= \int_{x_{1/N}}^{\infty} \frac{\pi}{2} x \exp\left(-\frac{\pi}{4}x^2\right) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{4}x_{1/N}} e^t(-dt) = [e^t]_{t=-\infty}^{t=-\frac{\pi}{4}x_{1/N}^2} = \exp\left(\ln \frac{1}{N}\right) \\
 &= \frac{1}{N}
 \end{aligned} \quad (1.118)$$

である。上記の計算では、 $-\frac{\pi}{4}x^2 = t$ ($-\frac{\pi}{2}x dx = dt$) という置換積分を用いた。

色を付けた部分の面積 1 次モーメントの y 成分は

$$\begin{aligned}
 S_{1/N-y} &\equiv \int_{x=x_{1/N}}^{x=\infty} \int_{y=0}^{y=p(x)} x dx dy \\
 &= \int_{x=x_{1/N}}^{x=\infty} x p(x) dx \\
 &= \int_{x=x_{1/N}}^{x=\infty} \frac{\pi}{2} x^2 e^{-\frac{\pi}{4}x^2} dx
 \end{aligned} \quad (1.119)$$

である。この積分は解析的に実行可能である。例えば関数積の積分公式を用いて計算を進めること

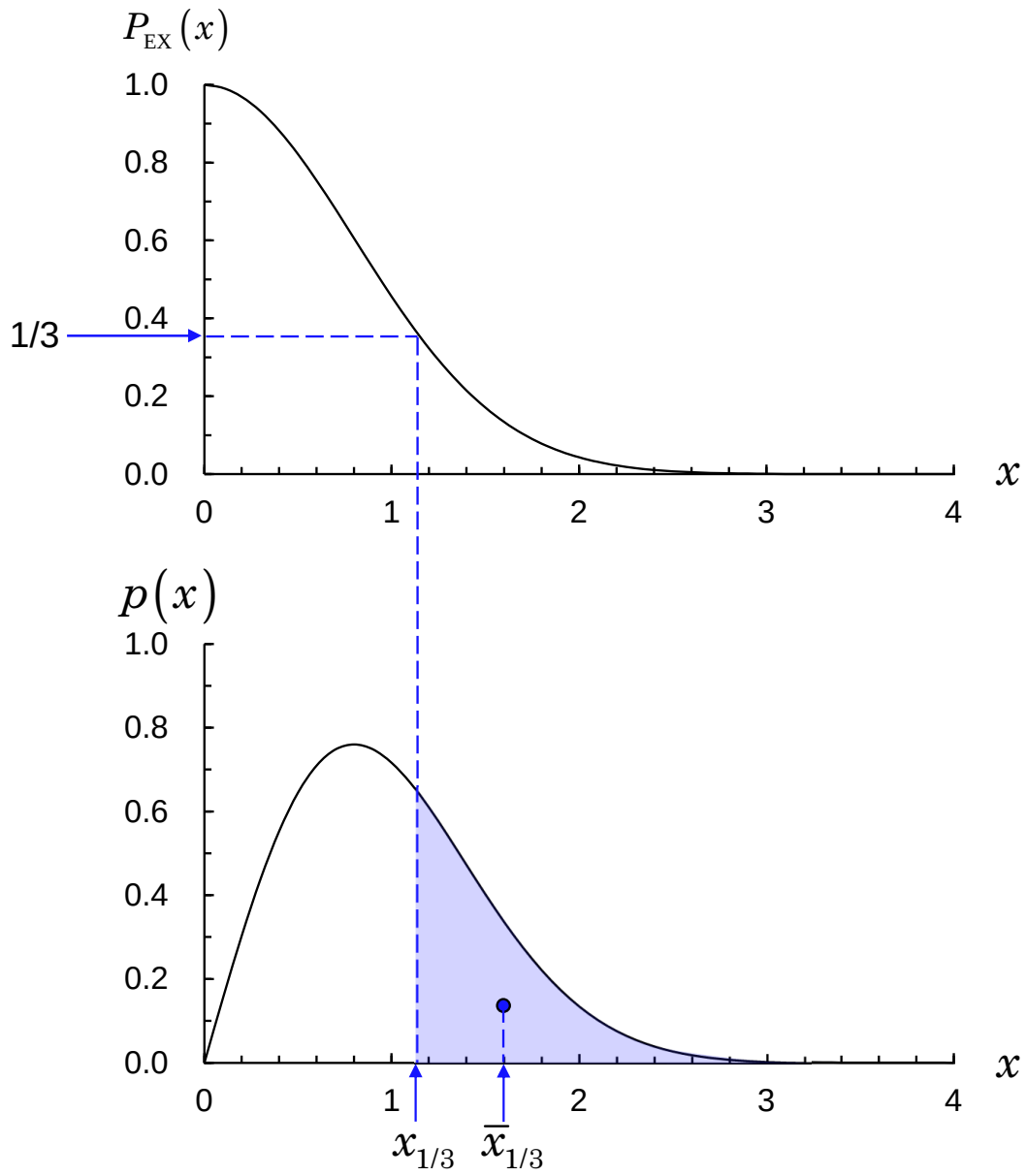


図 1.9

ができる。 $f' = \frac{\pi}{2} x e^{-\frac{\pi}{4} x^2}$ 、 $g = x$ とおく^{*11}。

$$f = \int \frac{\pi}{2} x e^{-\frac{\pi}{4} x^2} dx = -e^{-\frac{\pi}{4} x^2} + \text{const.} \quad (1.120)$$

^{*11} $\int f' g dx = [fg] - \int f g' dx$

であることを留意すると、

$$\begin{aligned}
 S_{1/N-y} &= - \left[e^{-\frac{\pi}{4}x^2} x \right]_{x_{1/N}}^{\infty} - \int_{x_{1/N}}^{\infty} -e^{-\frac{\pi}{4}x^2} dx \\
 &= x_{1/N} e^{-\frac{\pi}{4}x_{1/N}^2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}x_{1/N}}^{\infty} e^{-x'^2} dx' \\
 &= \frac{1}{N} x_{1/N} + \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} x_{1/N}\right) \\
 &= \frac{1}{N} x_{1/N} + \operatorname{erfc}(\sqrt{\ln N}).
 \end{aligned} \tag{1.121}$$

ここで、 $\operatorname{erfc}(x)$ は相補誤差関数である。

以上の計算結果を用いると、無次元化された $1/N$ 最大波高 $\bar{x}_{1/N}$ が次のように書ける ($\bar{x}_{1/N}$ と $x_{1/N}$ とを混同しないように注意)。

$$\bar{x}_{1/N} \equiv \frac{S_{1/N-y}}{S_{1/N}} = x_{1/N} + N \operatorname{erfc}(\sqrt{\ln N}). \tag{1.122}$$

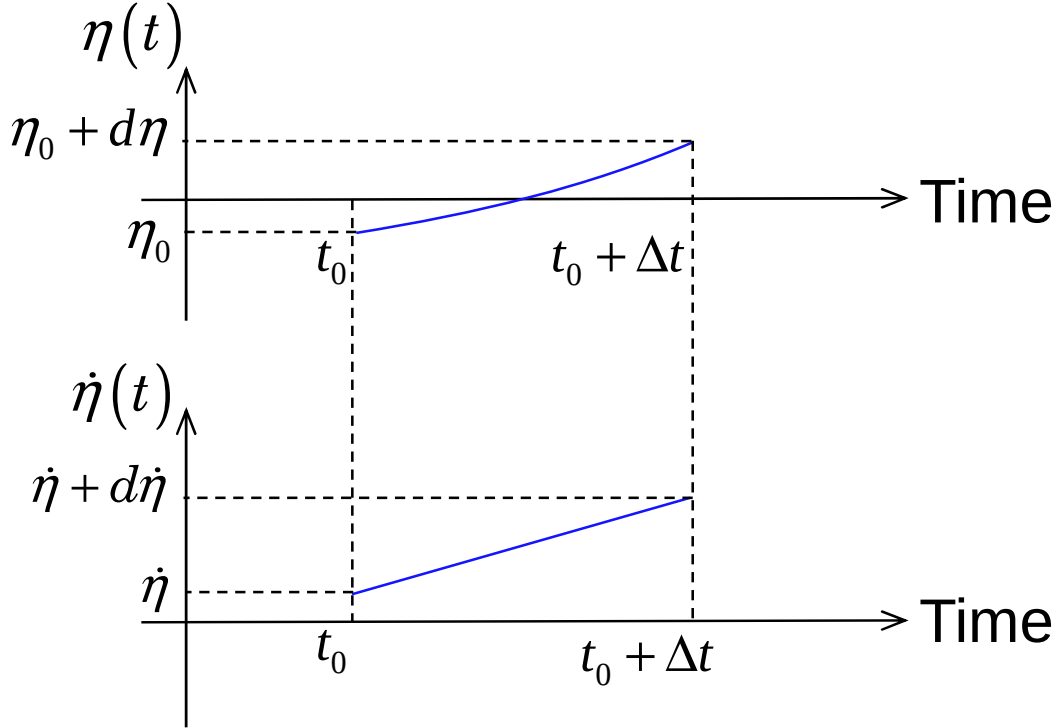
演習問題 1-7.

$\bar{x}_{1/N}$ と $x_{1/N}$ の数値を求めよ (ソフトウェアに付随している組み込み関数機能を用いてもよいが、その場合は漸近近似式による計算値も添えよ)。また、**演習問題 1-1** で求めた有義波高を無次元化しその値を $\bar{x}_{1/N}$ と比較のうえ両者の差を評価せよ。誤差が大きいと判断される場合にはその要因を考察せよ。

1.10 周期の期待値

ゼロアップクロスの平均周期を計算する理論式を誘導する。単位時間内に波形 $\eta(t)$ が上昇しながらゼロ線を横切る (ゼロアップクロスする) 平均回数を N_0^* と書く。時刻が $[t_0, t_0 + dt]$ の間に $\eta(t)$ がゼロ線 ($\eta = 0$ の線) を上向きに横切り、その間、時間変化率が $[\dot{\eta}, \dot{\eta} + d\dot{\eta}]$ の範囲の値をとるものとする。 $t = t_0$ において、 $\eta = \eta_0$ であるとする。ゼロアップクロスの条件から $\eta_0 < 0$ である。また、 dt が微小であれば、この時間範囲における波形は、時間変化率が $\dot{\eta}$ で一定の直線で近似できる。この近似では時刻 $t = t_0 + dt$ での波高は $\eta = \eta_0 + \dot{\eta}dt$ であり、この値はゼロアップクロスの条件より、この値は正である。したがって $\eta_0 + \dot{\eta}dt > 0$ 、すなわち $-\dot{\eta}dt < \eta_0 < 0$ である。ゼロアップクロスするという事象が発生する確率は、 η と $\dot{\eta}$ の結合確率密度 $p(\eta, \dot{\eta})$ を用いて

$$\begin{aligned}
 \int_{\eta_0 = -\dot{\eta}dt}^{\eta_0 = 0} \{p(\eta, \dot{\eta})d\dot{\eta}\} d\eta_0 &= \{p(0, \dot{\eta})d\dot{\eta}\} \{0 - (-\dot{\eta}dt)\} d\eta_0 \\
 &= p(0, \dot{\eta})d\dot{\eta} \dot{\eta}dt d\eta_0
 \end{aligned} \tag{1.123}$$

図 1.10 ゼロアップクロスする瞬間における η および $\dot{\eta}$ の時系列。

と計算できる。ここで、 $\dot{\eta}dt$ は非常に短い長さであることから、その範囲内で $p(\eta, \dot{\eta})$ が $p(0, \dot{\eta})$ で一定という近似をしている。

$\dot{\eta}$ はゼロアップの条件から、任意の正の値を取りうる。 t_0 から dt 時間の間にゼロアップクロスする確率 dP は、 $[0, \infty]$ の範囲で (1.123) を $\dot{\eta}$ に関して積分することで、

$$dP = \left\{ \int_{\dot{\eta}=0}^{\dot{\eta}=\infty} p(0, \dot{\eta}) \dot{\eta} d\dot{\eta} \right\} dt \quad (1.124)$$

という風に計算できる。よって、単位時間当たりの平均回数は (1.124) を t_0 から $t_0 + 1$ まで t に関して積分することで、

$$N_0^* = \int_{\dot{\eta}=0}^{\dot{\eta}=\infty} p(0, \dot{\eta}) \dot{\eta} d\dot{\eta} \quad (1.125)$$

という様に計算される。

波高の変位 η と変化率 $\dot{\eta}$ は互いに独立であり、それぞれが正規分布にしたがうとすると、 $p(\eta, \dot{\eta})$ は次の様に表せる。

$$p(\eta, \dot{\eta}) = \frac{2\pi\sqrt{\hat{m}_0\hat{m}_2}}{1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\eta^2}{\hat{m}_0} + \frac{\dot{\eta}^2}{\hat{m}_2} \right) \right\}. \quad (1.126)$$

ここで、 η 、 $\dot{\eta}$ の分散がそれぞれ $\hat{m}_0$ 、 $\hat{m}_2$ であることを用いている。この結合確率密度関数を (1.125) へ代入すると、

$$N_0^* = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\hat{m}_2}{\hat{m}_0}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \quad (1.127)$$

を得る。したがって、ゼロアップクロスの平均周期 T_0^* は、

$$T_0^* = \frac{1}{N_0^*} = 2\pi \sqrt{\frac{m_0}{m_2}} \quad (1.128)$$

と書ける。波のパワースペクトルの 0 次および 2 次モーメントが分かれば平均周期が計算できるということになる。この節では波高、波高変化速度の結合確率を勘定することで平均周期を導いた。その帰結として得られた (1.128) を観察するとこの結果は当然のものと考えることができる。平均周波数 ω^* は

$$\omega_0^* = \frac{2\pi}{T_0^*} = \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \quad (1.129)$$

となる。その定義から m_2 はパワースペクトルを確率とした (周波数)² の平均値 (期待値) と見なせる。 m_0 で割るのは確率の規格化のためである。 m_2/m_0 の平方根を取れば、周波数の平均値となる。

1.11 最高波高の期待値

波高の値を複数個取得し、その標本の中での「最大値」を考える。無限個の標本を取得することはできないから標本は常に有限個の数値のセットであるから、「最大値」は標本を取得する時と場所によって異なる。したがって、ここでいう「最大値」も確率変数と捉えることができる。本節ではこの「最大値」の期待値を計算してみることにする。しかし、既出の「 $1/N$ 最大波高」と混同しやすいため、この節では「最大値」という用語は以後使わず、**最高波高**あるいは**最高値**とよぶことにする。

波高の母集団から N_0 個の波高を抽出し、その中での最高値を無次元値で x_m とする。最高値 x_m の確率密度関数を $p_m(x_m)$ とする。確率密度関数を用いると、波高 x の最高値が $[x_m, x_m + dx_m]$ の範囲内にある確率は、 $p_m(x_m)dx_m$ と表される。

(1.110) において定義した超過確率 $P_{EX}(x)$ を用いると、 N_0 すべての値が x_m を超えない確率は、

$$\{1 - P_{EX}(x_m)\}^{N_0} \quad (1.130)$$

である (あるひとつの波高が x_m を超えない確率が $1 - P_{EX}(x_m) = P_{NEX}(x_m)$ と表されることを意識しよう)。したがって、 N_0 個の値のうち、少なくとも 1 個が x_m を超過する確率は、

$$1 - \{1 - P_{EX}(x_m)\}^{N_0} \quad (1.131)$$

である。同様に、 N_0 個の値のうち、少なくとも 1 個が $x_m + dx_m$ を超過する確率は、

$$1 - \{1 - P_{\text{EX}}(x_m + dx_m)\}^{N_0} \quad (1.132)$$

である。

x の最高値が $[x_m, x_m + dx_m]$ の範囲内にある確率は、次の引き算

「少なくとも 1 個が x_m を超過する確率」 - 「少なくとも 1 個が $x_m + dx_m$ を超過する確率」

によって求まる（あるクラスで行われたテストの最高点が 85 点以上 90 点以下である確率は、少なくとも誰か一人は 85 点以上を取っている確率から、少なくとも誰か一人は 90 点を超える確率を引くことで求まる）。したがって、

$$\begin{aligned} p_m(x_m)dx_m &= \left[1 - \{1 - P_{\text{EX}}(x_m)\}^{N_0}\right] - \left[1 - \{1 - P_{\text{EX}}(x_m + dx_m)\}^{N_0}\right] \\ &= F(x_m) - F(x_m + dx_m) \\ &= -\frac{dF}{dx_m}dx_m \\ &= \{1 - P_{\text{EX}}(x_m + dx_m)\}^{N_0} - \{1 - P_{\text{EX}}(x_m)\}^{N_0} \\ &= d\left[\{1 - P_{\text{EX}}(x_m)\}^{N_0}\right], \end{aligned} \quad (1.133)$$

上式において

$$F(x_m) \equiv 1 - \{1 - P_{\text{EX}}(x_m)\}^{N_0} = 1 - P_{\text{NEX}}(x_m)^{N_0} \quad (1.134)$$

とおいた。

なお、(1.133) は次の様書き換えることができる。

$$\begin{aligned} d\left[\{1 - P_{\text{EX}}(x_m)\}^{N_0}\right] &= \frac{d\left[\{1 - P_{\text{EX}}(x_m)\}^{N_0}\right]}{dx_m}dx_m \\ &= N_0 \{1 - P_{\text{EX}}(x_m)\}^{N_0-1} \left\{-\frac{dP_{\text{EX}}(x_m)}{dx_m}\right\}dx_m \\ &= N_0 \{1 - P_{\text{EX}}(x_m)\}^{N_0-1} p(x_m)dx_m. \end{aligned} \quad (1.135)$$

(1.135) の最後の式変形のところで、 $\frac{dP_{\text{EX}}(x_m)}{dx_m} = -\frac{dP_{\text{NEX}}(x_m)}{dx_m} = -p(x_m)$ であることを用いている。(1.135) は、 N_0 個の値のうち、ある一つだけが $[x_m, x_m + dx_m]$ の範囲内の値をとり、かつ、それ以外の $N_0 - 1$ 個が、 x_m を超えない確率と解釈される。事象の数え方は (1.133) は異なるものの、結局同じ事象を数えているのである。

最高値の確率密度関数を確率変数で表すことができたので期待値の計算を始める。(1.133) を用い

ると、

$$\begin{aligned} E[x_m] &= \int_0^\infty x_m p(x_m) dx_m \\ &= \int_0^\infty x_m \left(-\frac{dF}{dx_m} \right) dx_m. \end{aligned} \quad (1.136)$$

部分積分法を適用して積分を実行していく。ここで、

$$\lim_{x_m \rightarrow \infty} x_m F(x_m) = 0 \quad (1.137)$$

を仮定する。この仮定は数学的には自明ではないが、 $F(x_m)$ が「少なくとも1個が x_m を超過する確率」であることを踏まえると x_m が非常に大きくなると、それを超過する事象は発生しにくくなると想定できる。以上の様にこの仮定の妥当性を説明できる。したがって、

$$\begin{aligned} E[x_m] &= \int_0^\infty F(x_m) dx_m \\ &= \int_0^\infty \left[1 - \{1 - P_{EX}(x_m)\}^{N_0} \right] dx_m. \end{aligned} \quad (1.138)$$

(1.114) を適用し、置換積分法を用いると、

$$E[x_m] = \frac{1}{a} \int_0^\infty \frac{1}{2} \{1 - (1 - e^{-\theta})^N\} \theta^{-\frac{1}{2}} d\theta. \quad (1.139)$$

以降は、二項定理を用いる方法と、 N が非常に大きいという条件下での近似を用いる方法とを順次説明する。

二項定理を用いると、

$$\begin{aligned} (1 - e^{-\theta})^N &= 1 - Ne^{-\theta} + \frac{N(N-1)}{2 \cdot 1} e^{-2\theta} + \cdots + (-1)^N e^{-N\theta} \\ \therefore 1 - (1 - e^{-\theta})^N &= Ne^{-\theta} - \frac{N(N-1)}{2 \cdot 1} e^{-2\theta} + \cdots + (-1)^{N+1} e^{-N\theta}. \end{aligned} \quad (1.140)$$

またガンマ関数の性質

$$\int_0^\infty e^{-n\theta} \theta^{-\frac{1}{2}} d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}, \quad (1.141)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (1.142)$$

も用いると、求める期待値が

$$E[x_m] = \frac{1}{a} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \left\{ N \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{N(N-1)}{2 \cdot 1} \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + (-1)^{N+1} \frac{1}{\sqrt{N}} \right\} \quad (1.143)$$

という二項展開の形で表示できる。

次に $N \rightarrow \infty$ という極限の下で適用できる近似を用いた期待値の表示式を誘導してみる。指数関数の定義式を用いると、上述の二項展開の部分は以下の様に指数関数を用いて近似できる。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - e^{-a^2 x_m^2}\right)^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{N e^{-a^2 x_m^2}}{N}\right)^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\xi}{N}\right)^N = e^{-\xi}. \quad (1.144)$$

上式において、 $\xi = N e^{-a^2 x_m^2}$ とおいた。このおきかえにより次の様に変数変換できる。

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{1}{a} (\ln N)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\ln \xi}{\ln N}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{a} (\ln N)^{\frac{1}{2}} \left\{1 - \frac{1}{2} \frac{\ln \xi}{\ln N} - \frac{1}{4} \frac{1}{2!} \left(\frac{\ln \xi}{\ln N}\right)^2 - \dots\right\}. \end{aligned} \quad (1.145)$$

また、確率は下記の様に書き換えられる。

$$p(x_m) dx_m = d \left[\{1 - P_{EX}(x_m)\}^{N_0} \right] = d(e^{-\xi}) = -e^{-\xi} d\xi. \quad (1.146)$$

以上の変数変換により、最高値の期待値に対する

$$E[x_m] = \frac{1}{a} (\ln N)^{\frac{1}{2}} \left\{1 + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{(\ln N)} - \frac{1}{4} \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi^2}{6} + \gamma^2\right) \frac{1}{(\ln N)^2} + \dots\right\} \quad (1.147)$$

という近似式が得られる。比較的単純な係数および関数からなる近似式が導けると、その値の数値計算が簡易化され実用的である。図 1.11 に示した期待値の計算では、 N が大きくなるにつれ二項展開の係数が巨大な数になるため各項の足し算の際に桁落ちに注意を払う必要がある反面、近似式ではそのような注意の必要なしにより近似値が計算できる。

1.12 振幅と周期の結合確率密度

先の節で、波変位を素成波（三角関数によって表現した波）の重ね合わせによって表現した。その表現において確率変数として定義した Y_c (1.28) と Y_s (1.29) を、もう一度取り上げる。この節では、 Y_c と Y_s に加えて、その時間微分 $\dot{Y}_c$ と $\dot{Y}_s$ も確率変数として考慮に入れる。これら 4 つの確率変数の表記を簡単にするためにギリシャ文字 ξ_1 をつかって、

$$\xi_1 \equiv Y_c, \xi_2 \equiv Y_s, \xi_3 \equiv \dot{Y}_c = \dot{\xi}_1, \xi_4 \equiv \dot{Y}_s = \dot{\xi}_2$$

と書くことにする。 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ は互いに独立、平均 0 の正規分布にしたがうと仮定する。

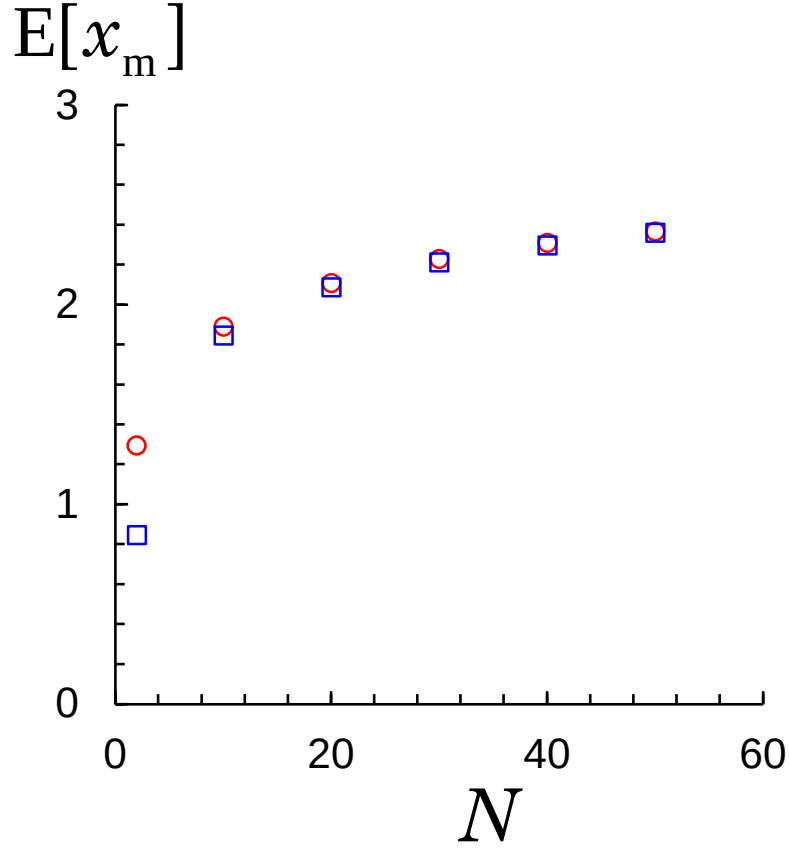


図 1.11 最高波高の期待値。○：二項展開による計算値 (1.143)、□：近似式による計算値 (1.147)

$$\xi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \{2\pi(f_n - \bar{f})t + \epsilon_n\} = R \cos \phi, \quad (1.148)$$

$$\xi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \{2\pi(f_n - \bar{f})t + \epsilon_n\} = R \sin \phi, \quad (1.149)$$

$$\xi_3 = -2\pi(f_n - \bar{f}) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \{2\pi(f_n - \bar{f})t + \epsilon_n\} = \dot{R} \cos \phi - R \sin \phi \dot{\phi}, \quad (1.150)$$

$$\xi_4 = 2\pi(f_n - \bar{f}) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \{2\pi(f_n - \bar{f})t + \epsilon_n\} = \dot{R} \sin \phi + R \cos \phi \dot{\phi}. \quad (1.151)$$

それぞれの変数の分散は次の通りである。

$$E[\xi_1^2] = E[\xi_2^2] = m_0, \quad (1.152)$$

$$E[\xi_3^2] = E[\xi_4^2] = \hat{\mu}_2, \quad (1.153)$$

$$\hat{\mu}_2 = (2\pi)^2 \int_0^{\infty} (f - \bar{f})^2 S(f) df = m_2 - \frac{m_1^2}{m_0}. \quad (1.154)$$

結合確率密度 $p(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ は次の様に書ける。

$$p(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4 m_0 \hat{\mu}_2} \exp\left(-\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2m_0}\right) \exp\left(-\frac{\xi_3^2 + \xi_4^2}{2\hat{\mu}_2}\right). \quad (1.155)$$

確率変数を $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ から $(R, \phi, \dot{R}, \dot{\phi})$ に変換する^{*12}。

$$p(R, \phi, \dot{R}, \dot{\phi}) = \frac{R^2}{(\sqrt{2\pi})^4 m_0 \hat{\mu}_2} \exp\left(-\frac{R^2}{2m_0}\right) \exp\left(-\frac{\dot{R}^2 + R^2 \dot{\phi}^2}{2\hat{\mu}_2}\right). \quad (1.157)$$

振幅に係わる量が R 、周期に係わる量が $\dot{\phi}$ であるから、結合確率密度 $p(R, \dot{\phi})$ を計算する。そのために、 $p(R, \phi, \dot{R}, \dot{\phi})$ の周辺確率の確率密度として $p(R, \dot{\phi})$ を計算する。 $p(R, \phi, \dot{R}, \dot{\phi})$ を $\dot{R}$ 、 ϕ の定義域全域にわたって積分する。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} p(R, \phi, \dot{R}, \dot{\phi}) d\phi d\dot{R} = \frac{R^2}{\sqrt{2\pi} \mu_0 \sqrt{\mu_2}} \exp\left(-\frac{R^2}{2\mu_0}\right) \exp\left(-\frac{R^2 \dot{\phi}^2}{2\hat{\mu}_2}\right). \quad (1.158)$$

「周期」を確率変数としてあつかっていくために、周期 T と位相の時間微分 $\dot{\phi}$ との関係を確認しておく。

$$\omega = \bar{\omega} + \dot{\phi}, \quad (1.159)$$

$$T = \frac{\omega}{2\pi} \quad (1.160)$$

であるから、

$$T = \frac{2\pi}{\bar{\omega} + \dot{\phi}} \quad (1.161)$$

という関係式が得られる。

振幅と周期を次の様に無次元化し、

$$\gamma \equiv \frac{R}{\sqrt{m_0}}, \quad (1.162)$$

$$\tau \equiv \frac{T}{2\pi/\bar{\omega}} = \frac{T}{2\pi m_0/m_1} = \frac{\bar{\omega}}{\bar{\omega} + \dot{\phi}}, \quad (1.163)$$

$$= \left(1 + \frac{\dot{\phi}}{\bar{\omega}}\right)^{-1} \simeq 1 - \frac{\dot{\phi}}{\bar{\omega}}, \quad \because \frac{\dot{\phi}}{\bar{\omega}} \ll 1, \quad (1.164)$$

^{*12} ヤコビアンは次の通りである。

$$|J| \equiv \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)}{\partial(R, \phi, \dot{R}, \dot{\phi})} = R^2. \quad (1.156)$$

確率変数を $(R, \dot{\phi})$ から (γ, τ) へ変換する^{*13}。 τ は正の値をとることから、次の様にその定義域で結合確率密度を積分したとき、

$$\int_0^\infty \int_0^\infty p(\gamma, \tau) d\gamma d\tau = 1 \quad (1.166)$$

となるように、規格化定数 C を導入する。 γ と τ との結合確率密度関数は、

$$p(\gamma, \tau) = C \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \left(\frac{\gamma}{\tau}\right)^2 \exp \left[-\frac{\gamma^2}{2} \left\{ 1 + \left(1 - \frac{1}{\tau}\right)^2 \frac{1}{\nu^2} \right\} \right], \quad (1.167)$$

$$\nu^2 \equiv \frac{1}{\bar{\omega}} \left(\frac{\mu_2}{\mu_0}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.168)$$

(1.166) を満たすように C を定めるために、(1.168) の2重積分を計算する。 γ に関する積分を先に実行すると、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty p(\gamma, \tau) d\gamma d\tau &= C \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \int_0^\infty \tau^{-2} \frac{\sqrt{\pi}}{4} g(\tau)^{-\frac{3}{2}} d\tau, \\ g(\tau) &\equiv \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(1 - \frac{1}{\tau}\right)^2 \frac{1}{\nu^2} \right\}. \end{aligned} \quad (1.169)$$

となる^{*14}。次に τ に関する積分を実行する。置換積分を用いる方法を示す。 $1 - \frac{1}{\tau} = \theta$ とおくと、 $d\tau = (1 - \theta)^{-2} d\theta$ であるから、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \tau^{-2} g(\tau)^{-\frac{3}{2}} d\tau &= \int_{-\infty}^1 (1 - \theta)^2 \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\theta^2}{\nu^2}\right) \right\}^{-\frac{3}{2}} (1 - \theta)^{-2} d\theta \\ &= 2\sqrt{2} \int_{-\infty}^1 \frac{1}{\left(\frac{1}{\nu^2}\theta^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}} d\theta. \end{aligned} \quad (1.171)$$

^{*13} ヤコビアンは次の通りである。

$$|J| \equiv \frac{\partial(\gamma, \tau)}{\partial(R, \dot{\phi})} = \frac{1}{\sqrt{m_0}} \left(\frac{m_1}{m_0}\right) \tau^2. \quad (1.165)$$

^{*14}

$$\int_0^\infty e^{-gx^2} x^{2n} dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{g^{2n+1}}} \quad (1.170)$$

において、 $n = 1$ とする。

ここで、

$$\int_{-\infty}^1 \frac{1}{\left(\frac{1}{\nu^2}\theta^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}} d\theta = \left[\frac{\theta}{\sqrt{\frac{\theta^2}{\nu^2} + 1}} \right]_{\theta=-\infty}^{\theta=1} = \left\{ \left(\frac{1}{\nu^2} + 1\right)^{-\frac{1}{2}} - (-\nu) \right\} \quad (1.172)$$

であるから^{*15}、

$$\int_0^\infty \int_0^\infty p(\gamma, \tau) d\gamma d\tau = \frac{1}{4\sqrt{2}\nu} 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\nu^2} + 1}} + \nu \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \nu^2}} + 1 \right) \quad (1.175)$$

となる。したがって規格化定数 C を

$$C = 2 \left(\frac{1}{1 + \nu^2} + 1 \right)^{-1} \equiv C(\nu) \quad (1.176)$$

とおけば、(1.166) を満たす $p(\gamma, \tau)$ が得られたことになる。

なお、 C を ν の関数と見なして $C(\nu)$ と書き、 $\nu \ll 1$ における $C(\nu)$ を近似表現すると

$$C(\nu) \simeq 1 + \frac{1}{4}\nu^2 \quad (1.177)$$

となるから、 $C(\nu)$ は 1 に近い値をとる。

以上で波高と周期の結合確率密度関数を求めることができた。これを基にしてこの確率密度関数がある確率分布の代表値（期待値、中央値、最頻値、標準偏差など）を求め統計的な性質を評価することができる。

^{*15} 不定積分

$$\int \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{2(2ax + b)}{(4ac - b^2)\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad (1.173)$$

および

$$\lim_{\theta \rightarrow -\infty} \frac{\theta}{\sqrt{\frac{\theta^2}{\nu^2} + 1}} = \lim_{\theta \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\sqrt{\frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{\theta^2}}} = -\nu \quad (1.174)$$

を用いる。

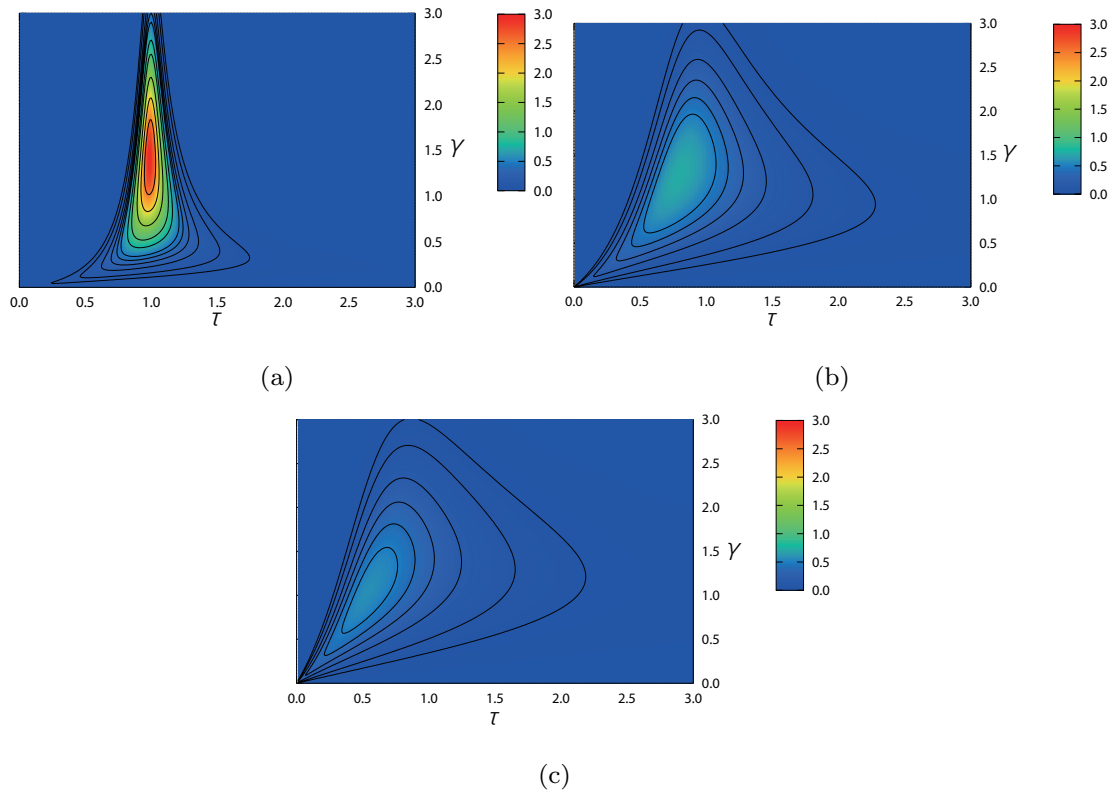


図 1.12 結合確率密度関数 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.75, 1., 1.5, 2., 2.5

演習問題 1-8.

波高と周期の結合確率密度関数 $p(\gamma, \tau)$ の最頻値（モード）は次の条件を満たす γ および τ である。

$$\frac{\partial p(\gamma, \tau)}{\partial \gamma} = 0 \text{ and } \frac{\partial p(\gamma, \tau)}{\partial \tau} = 0. \quad (1.178)$$

γ および τ のモードを ν を用いて表せ。

1.12.1 周辺化

結合確率密度を、ある確率変数に関して積分することで、周辺確率（marginal probability）を計算してみよう。ここでは、 $p(\gamma, \tau)$ を τ に関して積分する^{*16}。その結果 γ のみに依存する確率密度

^{*16} τ を横軸、 γ を縦軸に取った座標平面上に結合確率密度が分布している曲面を思い浮かべよう。 γ を定数とみなし、ある γ の値のところで曲面を切断し、その切断面には曲線と τ 軸とに囲まれた領域が存在する。周辺化とはその面積を求めることと同値である。

関数が得られる。

$$p(\gamma) = \int_0^\infty p(\gamma, \tau) d\tau. \quad (1.179)$$

方法は一通りではないだろうが、以下では置換積分を用いる方法を記す。先の節で得られた同時確率密度関数 $p(\gamma, \tau)$ を上式へ代入すると次式を得る。

$$p(\gamma) = C \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \gamma^2 \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2}\right) \int_0^\infty \frac{1}{\tau^2} \exp\left\{-\frac{\gamma^2}{2} \left(1 - \frac{1}{\tau}\right)^2 \frac{1}{\nu^2}\right\} p(\gamma, \tau) d\tau. \quad (1.180)$$

$$\frac{\gamma}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) \frac{1}{\nu} = \beta \quad (1.181)$$

とおくと、

$$\frac{\gamma}{\sqrt{2}} \frac{1}{\tau} \frac{1}{\nu^2} d\tau = d\beta \quad (1.182)$$

であり、 τ が 0 から ∞ まで変化するとき、 β は $-\infty$ から $\frac{\gamma}{\sqrt{2\nu}}$ まで変化するから、

$$\begin{aligned} p(\gamma) &= \frac{C}{\sqrt{2\pi\nu}} \gamma^2 \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\frac{\gamma}{\sqrt{2\nu}}} \frac{\sqrt{2\nu}}{\gamma} e^{-\beta^2} d\beta \\ &= C\gamma \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2}\right) \frac{1}{2} \left\{1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\nu}}\right)\right\}. \end{aligned} \quad (1.183)$$

周辺確率を計算する目的は、確率変数を減らすためと認識して差し支えない。

1.12.2 周期の条件付き確率および四分位数

振幅が γ であるという条件の下での周期の確率分布（条件付き確率分布）を求めてみる。条件付き確率の定義より、

$$\begin{aligned} p(\tau|\gamma) &= \frac{p(\gamma, \tau)}{p(\gamma)} \\ &= \frac{C \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \left(\frac{\gamma}{\tau}\right)^2 \exp\left[-\frac{\gamma^2}{2} \left\{1 + \left(1 - \frac{1}{\tau}\right)^2 \frac{1}{\nu^2}\right\}\right]}{C\gamma \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2}\right) \frac{1}{2} \left\{1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\nu}}\right)\right\}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu} \frac{1}{2} \left\{1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\nu}}\right)\right\}} \frac{\gamma}{\tau^2} \exp\left\{-\frac{\gamma^2}{2} \left(1 - \frac{1}{\tau}\right)^2 \frac{1}{\nu^2}\right\} \end{aligned} \quad (1.184)$$

である。

確率分布 $p(\tau|\gamma)$ の四分位数を Q_n と書くことにする。

$$\int_0^{Q_n} p(\tau|\gamma) d\tau = \frac{1}{4}n, \text{ where } n = 1, 2, \text{ and } 3. \quad (1.185)$$

(1.181) と同様の置換積分により、

$$\int_{-\infty}^{\beta_n} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\frac{1}{2} \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\nu}} \right) \right\}} e^{-\beta^2} d\beta = \frac{1}{4}n, \text{ where } \beta_n \equiv \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{Q_n} \right) \frac{1}{\nu}. \quad (1.186)$$

ここで

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\beta_n} e^{-\beta^2} d\beta = \frac{1}{2} \{ 1 + \operatorname{erf}(\beta_n) \} \quad (1.187)$$

であるから次式が成り立つ。

$$\frac{1 + \operatorname{erf}(\beta_n)}{1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\nu}} \right)} = \frac{1}{4}n. \quad (1.188)$$

(1.188) は β_n が満たす方程式である。これを $n = 1, 2, 3$ に対してそれぞれ解き β_n を決定すれば、(1.186) から Q_n を求めることができる。

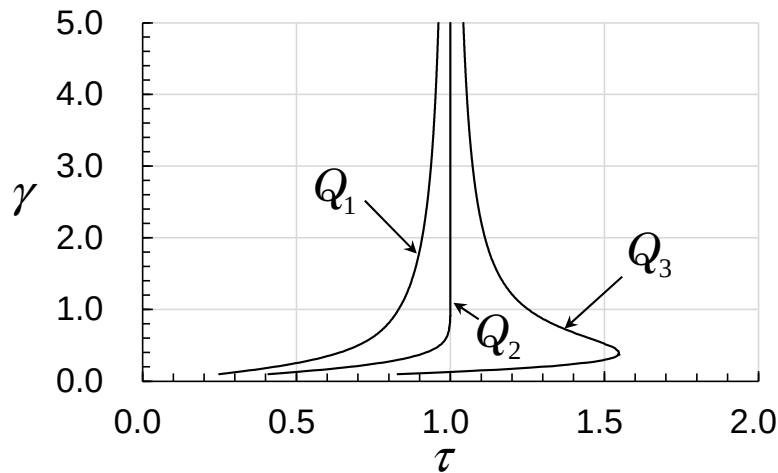


図 1.13 波高の条件付き確率および四分位数

演習問題 1-9.

【非必須】：(1.188) を数値的に解くプログラムを作成し、それを用いて四分位数 Q_n を計算しなさい。 ν は $0 < \nu < 1$ を満たす値をひとつ設定せよ。また、図 1.13 を自分で作図しなさい（ソフトウェア使用、手書きどちらでも構わない）。

第 2 章

不規則波に対する応答

本章のねらい：不規則な外乱が作用したときの構造物の応答を把握するための基礎的な理論を学ぶ。システムという概念で外乱と応答とを関連付ける。現象を表現する形式として時間の関数、周波数の関数という 2 つがあることを知り、これらを結びつけるフーリエ変換の使い方を知る。

2.1 ●スペクトルと自己相関関数

2.1.1 スペクトル

最初に「スペクトル (spectrum)」という用語について理解しておこう。

万有引力の法則で有名なニュートン (Isaac Newton) は光学の研究でも革命的な成果を出した。ニュートンの光学は天然物の色、透明薄膜の色、虹など気象現象の色をあつかった。その研究で三角プリズムに光を入射させプリズムから出射される光の像を観察する実験が行われた。ニュートンは著書『光学』のなかでその光の像のことを「スペクトル」とよんでいる。太陽光を入射させると、光の像は、屈折角が最も小さい部分から順に赤・黄・緑・青・堇の各色を呈したと述べている。

ニュートンによる光学は「光を分ける (分光する)」という概念を実証的に示した。ニュートンがこの実験を実施した 17 世紀後半以降、プリズムは分光器とほぼ同義となったといえる。光の像 (スペクトル) を観察すれば光の中の成分色光の強さの分布が把握できる。フーリエ変換はこの数学的表現に他ならない。一方、すべての色の光が重ね合わさると成分色光が見えなくなり白色光が観察される。これは数学的にはフーリエ逆変換に相当する。周波数 f のフーリエ成分を $X(f)$ と書くことにしよう。 $X(f)$ は周波数 f の成分の振幅を表している (ただし、 $X(f)$ は一般的に複素数であり、実数値としての振幅のほかには位相の情報も含まれていることに注意)。 $X(f)$ の絶対値の二乗 $|X(f)|^2$ は $X(f)$ の「強さ」、「エネルギー」を表す、と市販の教科書にはよく書かれている。周波数 f に対して $|X(f)|^2$ が示す分布のことをエネルギースペクトルとよぶ。

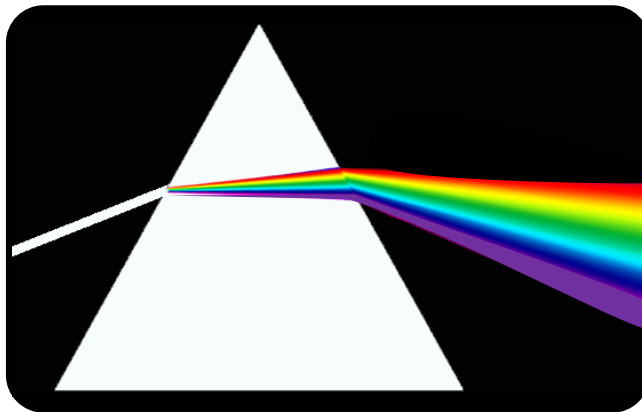


図 2.1 三角プリズムによる白色光の分光。

2.1.2 自己相関関数

相関について概説しておく。ふたつの変量 x 、 y があり、この両者間の関連を度合いを定量的に示す際に相関関数 (correlation function) とよばれる量を計算する。相関関数 C の定義は、

$$C \equiv E[xy] \quad (2.1)$$

である。あるいは、相関の度合いを -1 (逆) から 0 (無相関) を経て 1 (完全一致) までの規格化された区間で表す場合には次の様に定義される相関係数 r

$$r \equiv \frac{E[xy]}{\sqrt{E[x^2]E[y^2]}} \quad (2.2)$$

を計算する。

いま、上記の y を x とおいてみると x と x との相関 (自己との相関) を評価することになる。周期 T の周期関数 (下記) を例にとって自己との相関の意味を理解しよう。

$$x(t) = x(t \pm nT), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

この関数は周期の整数倍だけ時間をずらすと元の波形と重なる。元の波形 $x = x(t)$ と、時間を τ だけずらした波形 $y = x(t + \tau)$ とがどれだけ似ているかを調べることで $x(t)$ の周期性を評価できる。 C を時刻 t 、時間のずらし量 τ (lag, ラグとよぶことの方が多い) の関数として次のように定義されるものを自己相関関数 (auto-correlation function) という。

$$C(t, \tau) \equiv E[x(t)x(t + \tau)]. \quad (2.4)$$

ここでの平均演算 E は、定義上はアンサンブル平均である。定常性の仮定下では時間平均に置き換えることができる。このとき、自己相関関数 C は時刻 t には依存せずラグ τ のみの関数となる。

$$C(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt. \quad (2.5)$$

続いて、自己相関関数とスペクトルとの関係について理解しよう。いま、時間区間 $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ において定義され、不規則に変化する量を $x(t)$ と書くことにする。また、 $x(t)$ のフーリエ変換を $X(\omega)$ と書く。 $x(t)$ と $X(\omega)$ との数学的な関係は次の様に表される。

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t}d\omega \quad (2.6)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|e^{i\{\omega t + \theta(\omega)\}}d\omega, \quad (2.7)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-i\omega t}dt \quad (2.8)$$

$$= |X(\omega)|e^{i\theta(\omega)}. \quad (2.9)$$

自己相関関数の定義は、(2.5) である。この定義式に $x(t+\tau)$ のフーリエ積分表示式を代入してみよう。

$$\begin{aligned} C(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega(t+\tau)}d\omega \right\} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega\tau} \left\{ \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{i\omega t}dt \right\} d\omega. \end{aligned} \quad (2.10)$$

$x(t)$ は時間区間 $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ の外側では0であるから、上式における時間積分の範囲 $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ は、 $(-\infty, \infty)$ で置き換えても積分値は不変である。その置き換えの結果、上式の被積分関数の中がこの中身は

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{i\omega t}dt \quad (2.11)$$

となり、これは $X(\omega)$ の複素共役 (complex conjugate: X^* と書く) である。よって、

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi X(\omega)X^*(\omega)}{T} \right\} e^{i\omega\tau}d\omega \quad (2.12)$$

と表せる。

ここで $\tau = 0$ の場合を取り上げる。 $C(\tau = 0) = \overline{x^2}$ (統計的には x の分散であり、物理的には平均パワーである) であるから、

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi X(\omega)X^*(\omega)}{T} \right\} d\omega \quad (2.13)$$

という関係が成立する。上式の被積分関数がパワースペクトル $S(\omega)$ の定義である。先述したエネルギースペクトルとの定義との異なりに注意しよう。改めて書けば、

$$S(\omega) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi X(\omega)X^*(\omega)}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi |X(\omega)|^2}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} |X(\omega)|^2 d\omega, \quad (2.14)$$

となる。したがって、自己相関関数とパワースペクトルとは次の関係を満たす。

$$C_{\eta\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (2.15)$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_{\eta\eta}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.16)$$

つまり、自己相関関数とパワースペクトルとはフーリエ双対の関係にある。これを Wiener-Khinchine の定理という。

ここで周波数領域における隣り合う成分波間の周波数差 $\delta\omega$ が T と $\delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ という関係にあること、および極限 $T \rightarrow \infty$ により有限値 $\delta\omega$ は積分変数の微小変位 $d\omega$ とみなせるから、 $|X(\omega)|d\omega = \sqrt{S(\omega)(d\omega)^{-1}}d\omega$ である。(2.14) より、

$$|X(\omega)|d\omega = \sqrt{S(\omega)(d\omega)^{-1}}d\omega \quad (2.17)$$

であるから、

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\{\omega t + \theta(\omega)\}} \sqrt{S(\omega)d\omega} \quad (2.18)$$

を得る。この式は、既知のパワースペクトルに対して不規則な時刻歴をつくる時に用いられる。その際、位相 $\theta(\omega)$ は一様乱数を用いて計算する。

演習問題 2-1.

[1] 海洋波が次式のように単一周波数 ω_0 の正弦波で近似できると仮定する。

$$x(t) = a \sin \omega_0 t, \quad (2.19)$$

ここで a は定数であり振幅を表す。時間平均により、この波の自己相関関数と自己相関係数を求めよ。

次に同様の波の自己相関関数を空間平均から求めてみよう。いま、計測により N 個からなるアンサンブルが得られた。その計測値を下記の様を書く。

$$x(t) = a \sin(\omega_0 t + \theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.20)$$

ここで θ_i は位相でありその値は一様分布にしたがう。以上の仮定を用いて空間平均により自己相関関数を求めエルゴード性が成り立つことを確認せよ。

[2] 次式のように正弦振動にランダム振動 $r(t)$ が加算される重畳（ちょうじょう）波形を考える。

$$x(t) = a \sin \omega_0 t + r(t). \quad (2.21)$$

この場合、 $x(t)$ の自己相関関数は $r(t)$ の自己相関関数とどのような関係にあるか答えよ。

振幅がマルコフ過程として変動する正弦振動のパワースペクトルを計算してみよう。

$$x(t) = ar(t) \sin \omega_1 t \quad (2.22)$$

a は定数、 $r(t)$ は確率的に変動する振幅、 ω_1 は振動数で定数である。

$$c(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = \frac{1}{2}a^2 \cos \omega_0 \tau E[r(t)r(t+\tau)]. \quad (2.23)$$

$r(t)$ の自己相関関数は次の通り分かっているものとする。

$$E[r(t)r(t+\tau)] = C_0 e^{-\alpha|\tau|}. \quad (2.24)$$

C_0 は自己相関関数の $\tau = 0$ における値、 α は正の定数である。 $|\tau|$ の絶対値は自己相関関数が $\tau = 0$ に関して偶関数となるようにするために付けてある。

したがって $c(\tau)$ の自己相関関数は、

$$c(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = \frac{1}{2}a^2 C_0 e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_1 \tau \quad (2.25)$$

である。この式をウィナー・ヒンチンの定理に従いフーリエ変換することでパワースペクトルを求める。

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} a^2 C_0 e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_I \tau e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2} a^2 C_0 \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_I \tau e^{-\alpha|\tau| - i\omega\tau} d\tau \end{aligned} \quad (2.26)$$

右辺の積分を実行する方法はいくつかある。ここでは被積分関数の偶奇性を利用した計算法を示す。 $\cos \omega_I \tau$ 、 $e^{-\alpha|\tau|}$ は τ に関して偶関数であるから、 $e^{-i\omega\tau} = \cos \omega\tau - i \sin \omega\tau$ の2項のうち積分に寄与するのは偶関数項の $\cos \omega\tau$ のみである。したがって、

$$S(\omega) = a^2 C_0 \int_0^{\infty} \cos(\omega_I \tau) \cos(\omega\tau) e^{-\alpha\tau} d\tau \quad (2.27)$$

である。三角関数の性質

$$\cos \omega_I \tau \cos \omega\tau = \frac{1}{2} [\cos\{\omega + \omega_I\}t] + \cos\{\omega - \omega_I\}t] \quad (2.28)$$

を利用すると、

$$S(\omega) = \frac{1}{2} a^2 C_0 \int_0^{\infty} [\cos\{\omega + \omega_I\}t] + \cos\{\omega - \omega_I\}t] e^{-\alpha\tau} d\tau \quad (2.29)$$

である。この積分を実行すると、

$$S(\omega) = \frac{1}{2} a^2 C_0 \alpha \left\{ \frac{1}{\alpha^2 + (\omega + \omega_I)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\omega - \omega_I)^2} \right\} \quad (2.30)$$

を得る^{*1}。

演習問題 2-2.

(2.26) の積分は Euler の公式から、

$$\cos(\omega_I \tau) = \frac{1}{2} (e^{i\omega_I \tau} + e^{-i\omega_I \tau}) \quad (2.32)$$

であることを用いて計算することもできよう。この方法でパワースペクトルを求め上と同様の結果が得られることを示せ。また、横軸に周波数、縦軸のパワースペクトルをとったグラフに $S(\omega)$ をプロットせよ。

^{*1} 部分積分法により、

$$\int e^{Ax} \cos(Bx) dx = \frac{e^{Ax}}{A^2 + B^2} \{A \cos(Bx) + B \sin(Bx)\}, \text{ where } A \text{ and } B \text{ are constant.} \quad (2.31)$$

である。

2.1.3 減少型の自己相関関数

1次元のランダムウォークをモデルとして、自己相関関数が時間に対して減少する関数となることを導いてみよう。或る人が一直線上を移動することを想定する。この人は時刻0に原点を出発し、時間間隔 τ ごとに速さ v で移動するものとする。移動する方向は右か左に限られ、どちらの方向に進むかは確率的にのみ決定される。この直線上に右向きを正として X 軸をおく。 x_i を i ステップ目の移動量(負の向きの進む場合には負の値をとる)とすると、仮定により $x_i = +v\tau$ あるいは $x_i = -v\tau$ である。

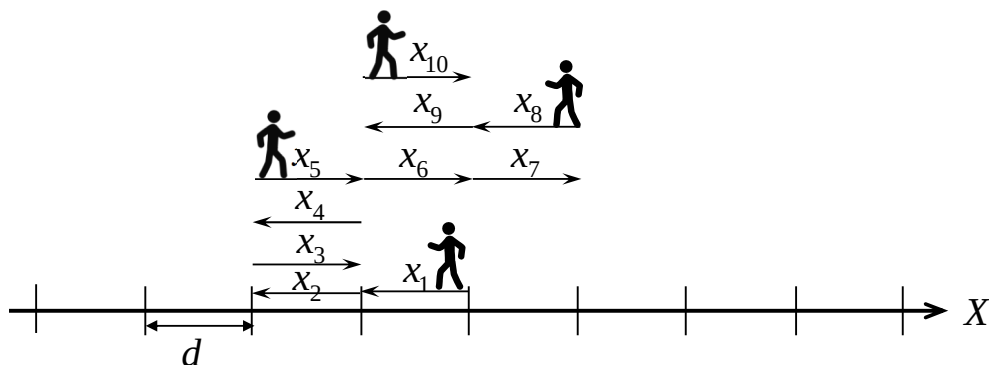


図 2.2

X_n を n ステップ目の移動が完了した後(つまり時刻が $n\tau$ の時点)の原点からの距離の期待値を表すとする。この定義により

$$X_n^2 = E[(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2] \quad (2.33)$$

$$= nd^2 + 2E[x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n] \quad (2.34)$$

である。ただし $d = v\tau$ とおいた。原点からの距離の期待値を 0 と仮定できるなら x_n^2 は分散を表すことになる。

任意の2つの移動量 x_r と x_s との間に相関がまったく無いと仮定すると $E[x_rx_s] = 0$ であるから上式の第2項は0となり、

$$X_n^2 = nd^2 \quad (2.35)$$

$$\therefore X_n = d\sqrt{n} = v\sqrt{\tau T_n} \quad (2.36)$$

である。ここで $T_n = n\tau$ (出発してから n ステップ目を完了するまでの経過時刻)とした。 X_n は $\sqrt{T_n}$ に比例する。

次に、移動量にある程度の相関を持たせてみる。隣り合うステップの移動量には相関があり、その相関係数を c とする。つまり、

$$-1 < c = E[x_r x_{r+1}] < 1 \quad (2.37)$$

とする。ただし、問題を単純化するため、 $x_r + 1$ の影響を除いた場合の x_r と x_{r+2} の相関はない（偏相関係数は0である）ものとする。この場合 x_r と x_{r+2} との相関係数は c^2 であり、 x_r と $x_r + s$ との間の相関係数は c^s である。この仮定の下では、

$$\begin{aligned} 2E[x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n] &= 2v^2 \tau^2 \{(n-1)c + (n-2)c^2 + \cdots + c^{n-1}\} \\ &= 2v^2 \frac{T_n^2}{n^2} \{(n-1)c + (n-2)c^2 + \cdots + c^{n-1}\} \end{aligned} \quad (2.38)$$

である。

$$S_{n-1} \equiv \frac{1}{n^2} \{(n-1)c + (n-2)c^2 + \cdots + c^{n-1}\} \quad (2.39)$$

とにおいて極限 $n \rightarrow \infty$ を取ったときの S_{n-1} の値が求められるように変形してみる。

$$\begin{aligned} S_{n-1} &= \frac{1}{n^2} \left\{ \frac{(n-1)c}{(1-c)} - \frac{b_{n-1}}{(1-c)} - \frac{c^n}{(1-c)} \right\}, \\ \text{where } b_{n-1} &\equiv \frac{c^2(1-c^{n-2})}{1-c}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

ここで、 b_{n-1} は初項 c^2 、公比 c 、項数 $n-2$ の等比数列の和である*2。ここからは、 v 、 T_n を有限値に保ったうえで X_n の極限値の大きさを0でない有限値できるかどうかを解析学的に調べてみる。

$$\begin{aligned} X_n^2 / (vT_n)^2 &= \left[\frac{n}{n^2} + \frac{2}{n^2} \left\{ \frac{(n-1)c}{(1-c)} - \frac{c^2(1-c^{n-2})}{(1-c)^2} - \frac{c^n}{(1-c)} \right\} \right] \\ &= \frac{1}{n^2} \left\{ \frac{1+c}{(1-c)} n - \frac{2c(1-c^n)}{(1-c)^2} \right\} \\ &= \frac{1}{n^2} \left\{ \left(1 + 2 \frac{\{1-(1-c)\}}{1-c} \right) n - 2 \{1-(1-c)\} \frac{1-c^n}{(1-c)^2} \right\} \\ &= \left\{ \left(\frac{1}{n^2} + 2 \frac{\{1-(1-c)\}}{(1-c)n} \right) - 2 \{1-(1-c)\} \frac{1-c^n}{\{(1-c)n\}^2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

上式の1行目において、極限 $n \rightarrow \infty$ を取ると、単純に $S_{n-1} \rightarrow 0$ になってしまい意味のある結果とはならない。脚注も参照しつつ $1-c$ という因子に着目して2行目以降の変形を行っている。こ

*2 等比数列 b_{n-1} の $n \rightarrow \infty$ における極限値は、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_{n-1} = \frac{c^2}{1-c} \quad (2.41)$$

であり、 $1-c$ の逆数に比例する。

れにより、 $n \rightarrow \infty$ とともに、 $1 - c \rightarrow 0$ とすることで $(1 - c)n \equiv N$ を 0 でない有限値に保つようにすればよいとわかる。 $n \rightarrow \infty^*$ のように上付き添え字 $*$ を付することで N を 0 でない有限値に保つという条件を表現するものとすれば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty^*} \frac{X_n^2}{(vT_n)^2} = \frac{2}{N} - \frac{2}{N^2} \left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty^*} c^n\right) \quad (2.43)$$

となる。

c の n 乗を含む部分の処理に際しては注意が必要である。指数関数の定義^{*3}により、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty^*} c^n &= \lim_{n \rightarrow \infty^*} \{1 - (1 - c)\}^n = \lim_{n \rightarrow \infty^*} \left(1 - \frac{N}{n}\right)^n \\ &= e^{-N} = e^{-\frac{T_n}{T^*}} \end{aligned} \quad (2.45)$$

となる。 T_n の増大、すなわち時間の経過とともに最初のステップと第 $n - 1$ ステップ（最後の方のステップ）との相関係数 c^n は指数関数的に減少していく。その減少率は、 T^* によって決まり、この意味で T^* を e-folding time という。なお、最後の等号では時間の次元をもつ $T^* \equiv \tau/(1 - c)$ を用いて $N = \frac{T_n}{T^*}$ と書き直した。以上より、分散の無次元値を、時間の次元をもつ量によって表現すると次の様になる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty^*} \frac{X_n^2}{(vT_n)^2} = 2 \frac{T^*}{T_n} \left\{1 - \frac{T^*}{T_n} \left(1 - e^{-\frac{T_n}{T^*}}\right)\right\}. \quad (2.46)$$

さて、このランダムウォークを行う人物が出発してから間もない時間、すなわち T^* に比べて T_n が非常に短い場合を想定する。この場合、 $e^{-\frac{T_n}{T^*}}$ をテーラー展開した際の低次の項のみで十分な近似が可能である。その結果、

$$X_n \simeq vT_n \quad (2.47)$$

となり、 T_n に比例して標準偏差が大きくなっていく。

一方、十分に長く時間が経過し、すなわち T^* に比べて T_n が非常に長い場合は、指数関数 $e^{-\frac{T_n}{T^*}} \simeq 0$ であるから、

$$X_n \simeq v\sqrt{2T^*T_n} \quad (2.48)$$

となり、標準偏差は $\sqrt{T_n}$ に比例して増加するようになる。つまり、出発当初に比べて標準偏差の増加は鈍くなる。

*3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \equiv e^x. \quad (2.44)$$

2.2 モーメント

(1.22) および (1.25) は、それぞれ速度および加速度の自己相関関数 (cross-correlation coefficient) が変位の自己相関関数の偶数階微分によって得られることを示している。この点と、自己相関関数とパワースペクトルとがフーリエ双対の関係にある点とを併せて考えると、速度および加速度の自己相関関数とパワースペクトルとを関連付けられそう、という発想が生まれる。

(2.15) の両辺を τ で2階微分することで、

$$\begin{aligned} C''_{\eta\eta}(\tau) &= \frac{d^2}{d\tau^2} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \frac{d^2}{d\tau^2} (e^{i\omega\tau}) d\omega \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \omega^2 (e^{i\omega\tau}) d\omega \end{aligned} \quad (2.49)$$

となる*4。 (1.22) および上式で $\tau = 0$ とすると次の関係が成り立つことが示せる。

$$C_{\dot{\eta}\dot{\eta}}(0) = -C''_{\eta\eta}(0) = \hat{m}_2. \quad (2.50)$$

同様に、

$$C_{\ddot{\eta}\ddot{\eta}}(0) = -C''''_{\eta\eta}(0) = \hat{m}_4. \quad (2.51)$$

2.3 ●線形システム

2.3.1 1自由度振動系をシステムとして見る

1自由度の場合の単位インパルス応答を、次の常微分方程式の解として求めてみる。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = \delta(t). \quad (2.52)$$

右辺 (外力項) の $\delta(t)$ をデルタ関数といわれ、この形の外力が与える力積は単位インパルスとよばれる。「単位」とは1という意味である (mks 単位系では大きさ 1Ns の力積という意味)。大きさが $1/\epsilon$ の力が持続時間 ϵ だけ作用したときの力積は $1/\epsilon \times \epsilon = 1$ である。この ϵ をゼロに近づけていっ

*4 ここでは微分演算と積分演算の順番を単純に交換させてもよいが、このような交換を常に行ってもよいわけではないことに注意。積分の上端と下端が (微分変数に関して) 定数でないときにはこの交換則は成り立たない。

た極限を考える。そのとき、力の大きさは無限大となり、持続時間はゼロに近づく（この極限のように持続時間が極めて短い力を撃力とよぶこともある）。すなわち、ある特定の非常に短い時間だけ無限大に近い大きさの力が作用し、それ以外の時間では大きさがゼロとなる。この力の大きさの時間変化をグラフに描けばデルタ関数そのものとなる。

この常微分方程式を次の初期条件（初期 $t = 0$ に物体は原点に静止していた）

$$\begin{cases} x(0) = 0, \\ \frac{dx}{dt}(0) = 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

の下で解く。(2.52) の両辺を、時刻 $t = 0$ から、初期から力積の持続時間 ϵ だけ経過した時刻 ($t = \epsilon$) まで積分する。そのうえで $\epsilon \rightarrow 0$ とすると、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\epsilon \left(m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx \right) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\epsilon \delta(t) dt \quad (2.54)$$

となる。各項の積分をひとつひとつ実行していこう。慣性力項の積分は、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\epsilon m \frac{d^2 x}{dt^2} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[m \frac{dx}{dt} \right]_{t=0}^{t=\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ m \frac{dx}{dt}(\epsilon) - m \frac{dx}{dt}(0) \right\} = m \frac{dx}{dt}(0+) \quad (2.55)$$

である。

減衰力項の積分は、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\epsilon c \frac{dx}{dt} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [cx]_{t=0}^{t=\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{cx(\epsilon) - cx(0)\} = 0 \quad (2.56)$$

である。

復原力項の積分は、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\epsilon kx dt = 0 \quad (2.57)$$

である（注：上記の積分の一次近似は $kx\epsilon$ であり、この値は $\epsilon \rightarrow 0$ で 0 に収束する）。

最後に、外力項の積分は、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\epsilon \delta(t) dt = 1 \quad (2.58)$$

これはデルタ関数の性質のひとつである。

以上の積分結果をまとめると、

$$m \frac{dx}{dt}(0+) - 0 = 1 \quad (2.59)$$

であり、この式は力積の法則そのものに他ならない。

撃力が作用し終わった後 ($t = \epsilon$ 以降) の現象を考えよう。この時間帯では外力はゼロであるから、物体の運動は次の通り、自由振動の運動方程式にしたがう。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (2.60)$$

この常微分方程式の解は、

$$x(t) = e^{-\gamma \omega_0 t} \left(A \cos \sqrt{1 - \gamma^2} \omega_0 t + B \sin \sqrt{1 - \gamma^2} \omega_0 t \right), \quad (2.61)$$

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}, \gamma \equiv \frac{c}{2\sqrt{mk}}. \quad (2.62)$$

この常微分方程式は外力を含まないため斉次であり、かつ線形の微分方程式であるから、一般解には未知定数がこの数。未知定数は $t = \epsilon - (\epsilon \text{ より少し前})$ と $t = \epsilon + (\epsilon \text{ の少し後})$ とにおける解の接続条件から、 $A = 0$ 、 $B = \frac{1}{m\omega_0 \sqrt{1 - \gamma^2}}$ と定めることができるので、

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_0 \sqrt{1 - \gamma^2}} e^{-\gamma \omega_0 t} \sin \sqrt{1 - \gamma^2} \omega_0 t \equiv h(t) \quad (2.63)$$

と書ける。(2.63) が求める単位インパル応答 $h(t)$ である。この応答は減衰振動である。振り子やブランコ、ヨーヨー等の動きが、初めの衝撃作用後においては基本的に減衰振動となることは日常生活で頻繁に経験する。

周波数応答関数 $H(\omega)$ は、インパルス応答のフーリエ変換として得ることができる (後節にて説明)。計算してみよう。

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{m\omega_0 \sqrt{1 - \gamma^2}} e^{-\gamma \omega_0 t} \sin \left(\sqrt{1 - \gamma^2} \omega_0 t \right) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{m\omega_0 \sqrt{1 - \gamma^2}} e^{-\gamma \omega_0 t} \frac{1}{2i} \left\{ e^{i\sqrt{1 - \gamma^2} \omega_0 t} - e^{-i\sqrt{1 - \gamma^2} \omega_0 t} \right\} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{m\omega_0 \sqrt{1 - \gamma^2}} \frac{1}{2i} \left[\int_0^{\infty} e^{\{-\gamma \omega_0 + i(\sqrt{1 - \gamma^2} \omega_0 - \omega)\}t} dt - \int_0^{\infty} e^{\{-\gamma \omega_0 - i(\sqrt{1 - \gamma^2} \omega_0 + \omega)\}t} dt \right] \\ &= -\frac{1}{m\omega_0 \sqrt{1 - \gamma^2}} \frac{1}{2i} \left\{ \frac{1}{-\gamma \omega_0 + i(\sqrt{1 - \gamma^2} \omega_0 - \omega)} - \frac{1}{-\gamma \omega_0 - i(\sqrt{1 - \gamma^2} \omega_0 + \omega)} \right\} \\ &= \frac{1}{m(-\omega^2 + \omega_0^2 + 2\gamma \omega_0 \omega i)} \end{aligned} \quad (2.64)$$

となる。この結果は、運動方程式の右边を $e^{i\omega t}$ (単位大きさの周期的外力) とし、左辺にある変位 x を $H(\omega)e^{i\omega t}$ (複素振幅を $H(\omega)$ とする調和応答) と書き換えることで得られる $H(\omega)$ と一致する。

つまり、

$$\{-m\omega^2 H(\omega) + i\omega c H(\omega) + k H(\omega)\} e^{i\omega t} = e^{i\omega t},$$

$$\therefore H(\omega) = \frac{1}{m(-\omega^2 + \frac{k}{m} + i\omega \frac{c}{m})} \quad (2.65)$$

であり、これは (2.64) に一致する。

無次元化の練習

上で求めた周波数応答関数 $H(\omega)$ は、mks 単位系で $[s^2 kg^{-1}]$ という次元をもつ。次元を有している以上、 $H(\omega)$ によって表されるひとつの数値は「大きい」、「小さい」、「適度な大きさだ」などの評価の対象となるものである。一般的にこうした評価は「適度」とされる基準が存在し、その基準に照らしてなされるものである。身長 165cm の日本人成人男性の身長が高いか低いかな？は、165cm の比較対象が、平均身長か、つきあう相手に求める身長か、ジェットコースターの制限身長かで変わってくるだろう。評価に客観性が要求される場面では基準を定めることが肝要となることが少なくない。

基準との比較方法で最も汎用的なものは、基準に対する比である。この比は、次元のある量を、それと同じ次元をもつ基準で割ることによって決まる無次元値である。この無次元値を 1（これも無次元値）と比較することで客観的評価が可能となる。

ここでは、上であつかった振動系における周波数応答関数 $H(\omega)$ の基準を定めることで、 $H(\omega)$ を無次元化する。基準を定める際に最初に行うべきことは、考察している現象が有する長さ・質量・時間の典型的な値（代表的な値）の決定である。本振動系では m を質量の代表値、 ω_0^{-1} を時間の代表値として採用する。長さに相当する量はこの例ではないのでここでは長さの代表値を決める必要はない。そのうえで以下の計算を行い、 H の無次元値（ H' と表す）を求める。

$$H'(\omega') = \frac{H(\omega)}{m^{-1}\omega_0^{-2}} = \frac{1}{-\omega'^2 + 1 + 2\gamma\omega'^2 i}, \text{ where } \omega' \equiv \frac{\omega}{\omega_0}. \quad (2.66)$$

$H'(\omega')$ が周波数比 ω' （無次元周波数）と減衰比 γ （無次元化減衰係数）のみの関数となることが確認できる。

周波数応答関数を「周波数の応答の関数」とだけ理解することに対する警告

本資料作成者が普段の勉強で気を付けていることをひとつ、ここに出てきた周波数応答関数を例に述べておく。

上に、「運動方程式の右辺を $e^{i\omega t}$ (単位大きさの周期的外力) とし、左辺にある変位 x を $H(\omega)e^{i\omega t}$ (複素振幅を $H(\omega)$ とする調和応答) と書き換えることで得られる $H(\omega)$ 」という記載がある。この情報から、周波数応答関数とは何か、自分の言葉で語れるだろうか？

上の説明は、 $H(\omega)$ とは、入力 (= 外力) に対する系の出力 (= 応答) の比のことだ、と主張している。このように認識しておけば、周波数応答関数の理解は8割方 OK である。あとの2割は、振幅の比だけでなく位相の遅れも情報として含んでいる ($H(\omega)$ は複素数)、という点である。先述した数式変形を土台として、この水準までの意味付け作業を自分の頭で行う、あるいは行おうという意欲をもつことを、真の意味で勉強するというのだと思う。

「周波数応答関数」を「単位インパルス応答関数のフーリエ変換したもの」と暗記したり、「しゅうはすうおうとうかんすう」と呼ばれている何か、という風にとりあえず認識しておく態度は、学生時代でも役には立たないし、社会人になってからは有害ですらある。

“AI (Artificial intelligence)” という言葉を多用してはいないだろうか？「AI って何？」と尋ねられたとき、自分の言葉で語れるだろうか？もし、「AI って何？」と尋ねられたとき「人工知能のことだよ」という回答しか頭に浮かばないのなら、少なくとも“AI” という言葉をつかうことを控えることから始めるべきだと思う。

「習った後の意味付け」、「解いた後の理論の再構築」、こうしたことを意識して勉強を進めてほしい。

2.3.2 線形システム理論の一般化

前節の内容を一般化する (前節であつかった例題に比べ抽象的な表現が多くなるので、じっくり (ゆっくり) 理解を進めていっていただきたい)。この講義では「システム」を「外部からもたらされる入力に対して出力というかたちで応答を示すもの」と定義しておく。例を表 2.1 に挙げる。「線形」とは、入力が n 倍になれば出力は、形はそのまま大きさが n 倍になり、およびゼロ入力 (入力がない) に対してはゼロ出力 (出力がない) になることを意味するものとする。あるいは、二つの入力に対する出力はそれぞれの出力の加算であることを意味する。したがって、線形システムでは重ね合わせの原理が成り立つ。

本講義で扱うシステムは力学系である。力学系では入力とは外力 (外乱、擾乱、力積) のことで、出力とは力学系の運動のことである。つまり、システムとして運動方程式によって記述される系であると理解することもできる。

表 2.1 システム（入力と出力との組み合わせ）の例。

システム	入力	出力
自動販売機	料金を投入しボタンを押す	お茶が出てくる
人体	解熱剤を服用する	体温が低下する
河川流域	雨が降る	水が流出する
高層ビル	地震波が伝搬する	動揺する
船舶	波が伝搬する	動揺する

今、ある単位系において1という大きさ（単位大きさ）をもつ入力システムに作用したとしよう。力学系を考えているので、この入力を力積と考える。この力積は、ある特定の時刻 $t = \eta$ に非常に短い時間だけ作用するものとする（図 2.3 左上）。これを関数として $u(t - \eta)$ と書くことにし、これを単位インパルス*5とよぶ。

この入力 $u(t - \eta)$ に対してシステムは応答し出力を示す。この出力を $h(t - \eta)$ と表すことにする（図 2.3 右上）。これは単位インパルスに対する応答であるから単位インパルス応答という。

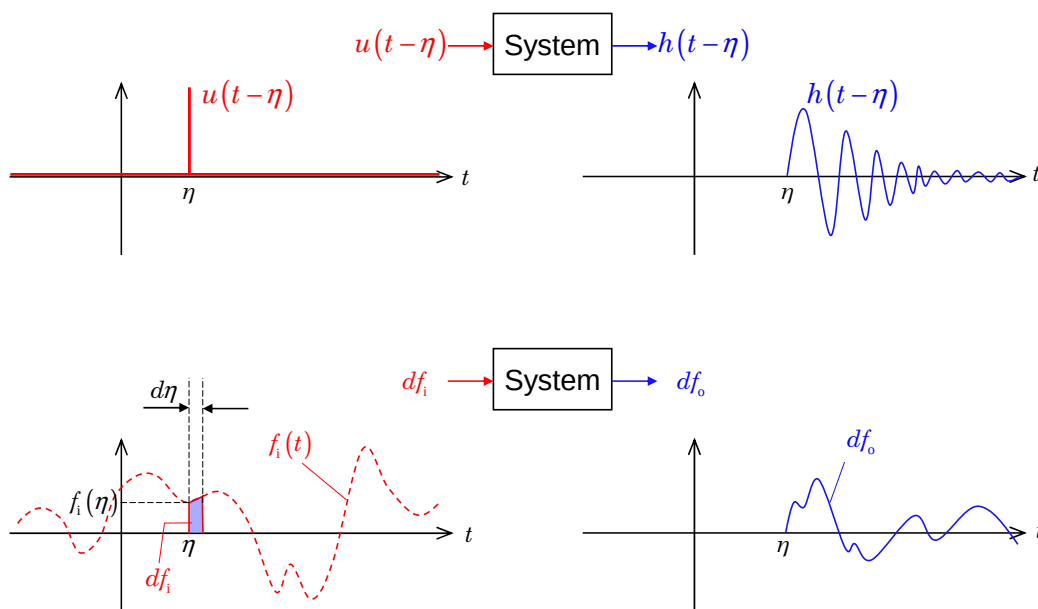


図 2.3

以上を踏まえて、もうひとつ別の入力-出力の組み合わせを取り上げる。入力、時間に関する

*5 インパルスとは力積のことである。筆者は「単位力積」とよぶ方が分かりやすいと思っているが「インパルス」というカタカナ用語をつかう慣わしがある…。

連続関数 $f_i(t)$ であるとする（図 2.3 左下の斜線）。ある時刻 $t = \tau$ から作用し始め、非常に短い時間 $d\eta$ だけ作用する力積は大きさが $df_i(t) = f_i(\eta)d\eta$ である。この入力 df_i に対する出力を df_o と表すことにする（図 2.3 右下）。

単位インパルスに比して、入力 df_i は大きさが $df_i = f_i(\eta)d\eta$ 倍である。したがって、出力 df_o は、単位インパルス応答に比して大きさが $df_o = h(t - \eta)f_i(\eta)d\eta$ 倍になるから、 $df_o = h(t - \eta)f_i(\eta)d\eta$ である。

以上では、ある特定の時刻 η に作用した入力と、それに対する出力のみを考えた。ここからは、より現実的な状況を考えていく。入力は色々な時刻に作用するから、 η は色々な時刻を表すと考えなくてはならない。したがって、ここまで定数としてあつかった η を、ここからは変数としてあつかう。重ね合わせの原理の考え方に立てば、「はるか以前（ $\eta = -\infty$ ）から現時刻 t までに作用した入力に対する出力が重ね合わさり現時刻 t の出力を決定する」と考えてよい。このことは η を積分変数とする以下の定積分で表される。

$$f_o(t) = \int_{-\infty}^t f_i(\eta)h(t - \eta)d\eta. \quad (2.67)$$

前段落の説明では現時刻 t の出力を求めるためには、過去（積分範囲の下端）から、その現時刻 t （積分範囲の上端）まで積分すればよいと述べた。現在起きる現象は、過去から現在までの入力を考えるというのは直感的に納得できるであろう。では、ここでひとつ次の問いを考えてみてほしい：

「ある未来時刻 $\eta^\dagger(> t)$ （例えば 3 時間後の未来）における入力は現時刻 t での現象に影響を与えるか？」

この問いに対する答えは、“No” である。時間は過去から未来へ向かって流れる（経過する）概念を多くの人は何なりと受け入れられるであろう。この概念の下では、未来時刻 $\eta(> t)$ の入力は、現時刻での出力 $f_o(t)$ に影響を与えない（これを因果律と呼んだりする）。したがって積分変数 η の範囲を t を超えて ∞ まで拡張しても上記の定積分の値は変わらないことになる。よって、(2.67) は次の様にも書ける：

$$f_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(\eta)h(t - \eta)d\eta. \quad (2.68)$$

(2.68) は積分変数の変換して下記の様にも書ける。

$$f_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t - \eta)h(\eta)d\eta. \quad (2.69)$$

時刻 t から τ だけ時間が経過した時刻 $t + \tau$ における出力は

$$f_o(t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t + \tau - \eta)h(\eta)d\eta \quad (2.70)$$

と書ける。このことを利用して出力の自己相関関数 $C_{oo}(\tau)$ を求める。

$$\begin{aligned}
 C_{oo}(\tau) &= E[f_o(t)f_o(t+\tau)] \\
 &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_i(t+\tau-\eta)f_i(t-\eta)h(\eta)h(\xi)d\eta d\xi\right] \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{E[f_i(t+\tau-\eta)f_i(t-\eta)]h(\eta)h(\xi)d\eta d\xi}{C_{ii}(\tau+\eta-\xi)} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}C_{ii}(\tau+\eta-\xi)h(\eta)h(\xi)d\eta d\xi.
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

ウィナー・ヒンチンの定理 (2.16) を適用して出力のパワースペクトルを計算してみる。

$$\begin{aligned}
 S_{oo}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}C_{oo}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \\
 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}C_{ii}(\tau+\eta-\xi)h(\eta)h(\xi)d\eta d\xi\right\}e^{-i\omega\tau}d\tau.
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

積分変数を $\sigma = \tau + \eta - \xi$ により変換すると、

$$\begin{aligned}
 S_{oo}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[h(\eta)e^{i\omega\eta}][h(\xi)e^{-i\omega\xi}][C_{ii}(\sigma)e^{-i\omega\sigma}]d\xi d\sigma \\
 &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty}h(\eta)e^{i\omega\eta}d\eta}{H^*(\omega)}\frac{\int_{-\infty}^{\infty}h(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi}{H(\omega)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}C_{ii}(\sigma)e^{-i\omega\sigma}d\sigma
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

と変形できる。ここで、 $H(\omega)$ は (2.64) で計算した周波数応答関数である。 $H^*(\omega)$ は $H(\omega)$ の複素共役 (complex conjugate) である。 $H(\omega)$ と $h(t)$ との関係を改めて記す。

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-i\omega t}dt. \tag{2.74}$$

すなわち周波数応答関数は単位インパルス応答のフーリエ変換で与えられる。よって、単位インパルス応答は周波数応答関数の逆フーリエ変換によって与えられる。

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)e^{i\omega t}d\omega. \tag{2.75}$$

出力のパワースペクトルの計算結果を整理すると、

$$S_{oo}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{ii}(\omega) \tag{2.76}$$

となる。この関係式を用いると、入力のパワースペクトル（海洋波などの外力のパワースペクトル）と周波数応答関数（システムを表現する運動方程式のみによって決まる）とが既知であれば、システム出力のパワースペクトルを決定できることになる。

(2.76) を用いる例題として、1 自由度振動系の応答を検討してみよう。固有振動数が ω_0 である 1 自由度振動系に外力が作用したときの応答を計算してみよう。この問題は (2.52) の右辺をより一般的な外力 F_I で置き換えた

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F_I \quad (2.77)$$

をあつかうことに相当する。外力 F_I はシステムへの入力であることを陽に示すため添え字 I を付けた。

いま、その入力が次の形のパワースペクトル $S_{ii}^\dagger$ をもつと仮定する。

$$S_{ii}^\dagger(\omega^\dagger) \equiv \frac{S(\omega)}{\frac{1}{2}a^2 C_0 \alpha} \omega_I^2 = \frac{1}{\alpha^{\dagger 2} + (\omega^\dagger + 1)^2} + \frac{1}{\alpha^{\dagger 2} + (\omega^\dagger - 1)^2},$$

where $\omega^\dagger \equiv \frac{\omega}{\omega_I}$ and $\alpha^\dagger \equiv \frac{\alpha}{\omega_I}$. (2.78)

$\omega^\dagger$ は次元ありの周波数 ω を ω_I を基準として無次元化した変数である。 $S(\omega)$ は (2.30) で求めたもので、 $S_{ii}^\dagger(\omega^\dagger)$ は $S(\omega)$ を無次元化したものである。

無次元化された周波数応答関数として (2.66) で求めたものを使える。ただし、(2.66) における無次元化では、基準を固有振動数 ω_0 としたため、 $\omega' = \frac{\omega^\dagger}{\omega_0/\omega_I}$ という関係にあることに注意して、 $\omega^\dagger$ の関数として書き換えると、

$$\begin{aligned} H^\dagger(\omega^\dagger) &= \frac{1}{-\left(\frac{\omega_I}{\omega_0}\right)^2 \omega^{\dagger 2} + 1 + 2\gamma \left(\frac{\omega_I}{\omega_0}\right)^2 \omega^{\dagger 2} i} \\ &= \left(\frac{\omega_0}{\omega_I}\right)^2 \frac{1}{-\omega^{\dagger 2} + \left(\frac{\omega_0}{\omega_I}\right)^2 + 2\gamma \omega^{\dagger 2} i} \end{aligned} \quad (2.79)$$

となる。(2.76) を用いると出力スペクトルが次の様に求められる。

$$\begin{aligned} S_{oo}^\dagger(\omega^\dagger) &= |H^\dagger(\omega^\dagger)|^2 S_{ii}^\dagger(\omega^\dagger) \\ &= \left(\frac{\omega_0}{\omega_I}\right)^4 \frac{1}{\left\{-\omega^{\dagger 2} + \left(\frac{\omega_0}{\omega_I}\right)^2\right\}^2 + (2\gamma \omega^{\dagger 2})^2} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{\alpha^{\dagger 2} + (\omega^\dagger + 1)^2} + \frac{1}{\alpha^{\dagger 2} + (\omega^\dagger - 1)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.80)$$

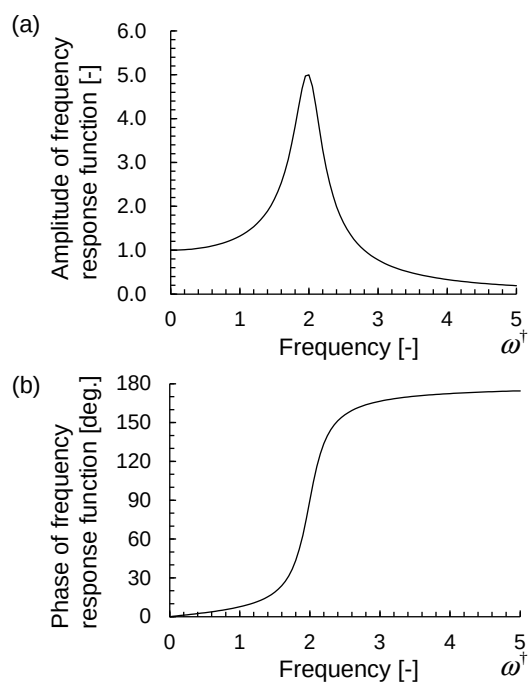


図 2.4 周波数応答関数：(a) 振幅、(b) 位相。

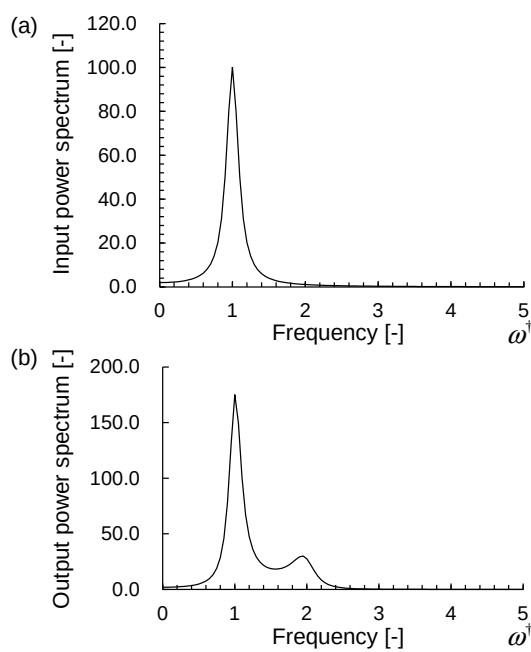


図 2.5 パワースペクトル：(a) 入力、(b) 出力。

演習問題 2-3.

図 2.4、図 2.5 を作図せよ。また、パラメータを変更させてみて、パワースペクトルがどのように変化するか考察せよ。

2.4 白色雑音の導入と応用

(2.1.3) 節にて考えた減少する自己相関関数を再度取り上げよう。次式を、システムへ入力される攪乱の自己相関関数とする。

$$C_{ii}(\tau) = \alpha e^{-\beta|\tau|}, \quad (2.81)$$

ここで α, β は定数である。この入力のパワースペクトルはウィナー・ヒンチンの定理に基づき、

$$\begin{aligned} S_{ii}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha e^{-\beta|\tau|} e^{i\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{2\alpha\beta}{\beta^2 + \omega^2} = \frac{2\alpha}{\beta} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2} = \frac{2\alpha}{\beta} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega'}{\beta\frac{U}{\sqrt{2}g}}\right)^2} \equiv S'_{ii}(\omega') \end{aligned} \quad (2.82)$$

という風に計算される。ここで、 $\omega' \equiv \frac{U}{\sqrt{2}g}\omega$ であり、Neumann 型海洋波スペクトル (1.94) にて用いた風速 U と重力加速度 g とによって無次元化した周波数である。

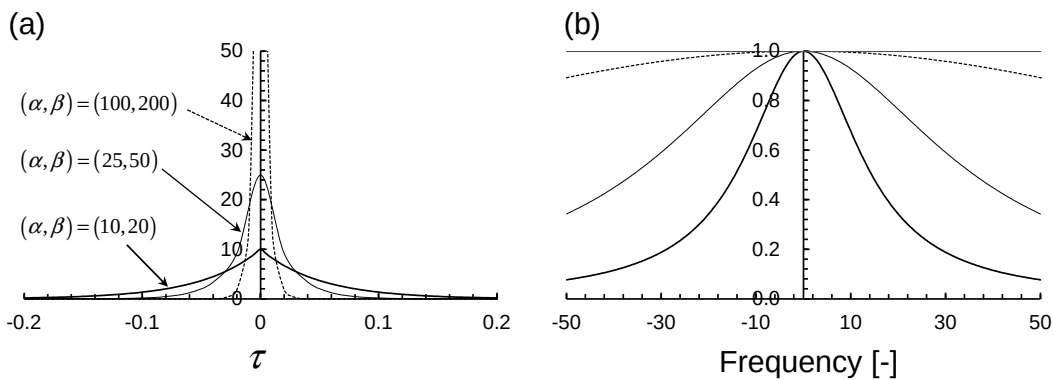


図 2.6 (a) 自己相関関数、(b) パワースペクトル。赤線：白色雑音

$\frac{\alpha}{\beta}$ を一定値（有限値）に維持しながら $\alpha, \beta \rightarrow \infty$ とすると、パワースペクトルが $\frac{\beta}{2\alpha}$ で一定となる。同時に自己相関関数はデルタ関数（の定数倍）に等しくなる。この性質をもつ攪乱（信号）を白色雑音という。これは、周波数領域（パワースペクトル）でみるとどの周波数でも同じ大きさのパワーをもち、時間領域でみると過去および未来におけるすべての値とは無相関であり、現在（ $\tau = 0$ ）

との相関が無限大となる信号である。このような白色雑音がシステムへ入力され、その結果、このシステムは海洋波を出力すると想定する。

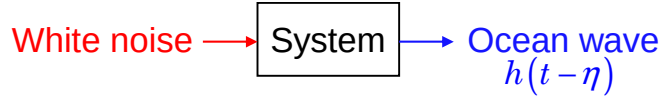


図 2.7

その出力される海洋波のスペクトルを Neumann 型と仮定し、その型に対する有理関数近似式 (1.99) を適用する。

$$S'_{oo}(\omega') = (\omega')^{-6} \left\{ \frac{n(\omega')^2}{1 + n(\omega')^2} \right\}^n. \quad (2.83)$$

入力と出力のパワースペクトルの関係を表す (2.76) 式において、入力の白色性を加味すると次式

$$S'_{oo}(\omega') = |H(\omega')|^2 (\text{実定数}) \quad (2.84)$$

のように、出力のパワースペクトルと周波数応答関数の絶対値 2 乗との間に比例関係を持たせることができる。この関係を使うと出力のパワースペクトルが既知であれば、周波数応答関数を逆算できそうである。なるべく紙と鉛筆だけを用いてこのことを確かめてみよう。 $H(\omega')$ は一般に複素数であるから、これに対応させるように $S'_{oo}(\omega')$ も複素空間に拡張させる。そのために複素数 $\lambda \equiv \omega + i\sigma$ を導入し、複素関数 $S'_{oo}(\lambda)$ を解析してみることにする。

パワースペクトルは一般に正値の偶関数である。したがって次の様に分解可能である（スペクトル因子分解）。

$$S'_{oo}(\lambda) = S'^{+}_{oo}(\lambda) \cdot S'^{-}_{oo}(\lambda), \quad (2.85)$$

$$S'^{+}_{oo}(\lambda) = \{S'^{-}_{oo}(\lambda)\}^* \text{ and } S'^{-}_{oo}(\lambda) = \{S'^{+}_{oo}(\lambda)\}^*. \quad (2.86)$$

ここで、 $*$ は複素共役を表す。 $S'^{+}_{oo}(\lambda)$ は、 $S'_{oo}(\lambda)$ のもつ零点と極のうち、複素平面の上平面（虚部が正の領域）にあるものを含み、 $S'^{-}_{oo}(\lambda)$ は同様に下平面（虚部が負の領域）にあるものを含む。

(2.82) と (2.83) とにより、分解後の各因子は次のように書ける。

$$S'^{+}_{oo}(\lambda) = i \sqrt{2.4 \left(\frac{U^2}{2g^2} \right)^3 \frac{\beta}{2\alpha} \frac{\lambda^{n-3}}{\left(\lambda - \frac{1}{\sqrt{n}} i \right)^n}}, \quad (2.87)$$

$$S'^{-}_{oo}(\lambda) = -i \sqrt{2.4 \left(\frac{U^2}{2g^2} \right)^3 \frac{\beta}{2\alpha} \frac{\lambda^{n-3}}{\left(\lambda + \frac{1}{\sqrt{n}} i \right)^n}}. \quad (2.88)$$

(2.84) における左辺が上式のように分解されるから、 $H(\lambda)$ は、 $S'_{oo}^+(\lambda)$ の実数倍か、または $S'_{oo}^-(\lambda)$ の実数倍である。数学的にはこの選択には任意性があるが、物理的な理由により $S'_{oo}^+(\lambda)$ の実数倍が選ばれる。複素関数の極の虚部が正ならばそれを逆フーリエ変換して出てくる時間の関数は減衰関数となり、逆に極の虚部が負ならば増加関数となる^{*6}。インパルス応答として妥当な関数は前者である。

以上から右辺の $H(\lambda)$ は、

$$H(\lambda) \sqrt{2.4 \left(\frac{U^2}{2g^2} \right)^3 \frac{\beta}{2\alpha}} H^\dagger(\lambda),$$

$$\text{where } H^\dagger(\lambda) \equiv (\lambda)^{-6} \left\{ \frac{n\lambda^2}{1+n\lambda^2} \right\}^n. \quad (2.89)$$

と表せる。 $H^\dagger(\lambda)$ を求めることができれば、それを次に示すように逆フーリエ変換することで、インパルス応答を計算できる。

$$h^\dagger(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} H^\dagger(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda. \quad (2.90)$$

上式の積分は複素積分である。 $S'_{oo}^+(\lambda)$ の極 $\lambda = \frac{1}{\sqrt{n}}i$ が n 位の極であることを踏まえて留数定理を適用すると、インパルス応答が次の通り計算される。

$$h^\dagger(t) = \left\{ \frac{1}{(n-1)!} \left(-\frac{1}{\sqrt{n}}t \right)^{n-3} + \sum_{k=1}^{n-3} \frac{(n-3) \cdots (n-k-2)}{(n-k-1)!k!} \left(-\frac{1}{\sqrt{n}}t \right)^{n-3-k} \right\} t^2 e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}t}. \quad (2.91)$$

インパルス応答が分かれば、(2.67) 式（本節の場合、白色雑音とインパルス応答とのたたみこみ積分）を用いて、指定したパワースペクトルをもつ時系列をつくることができる。

^{*6} $e^{i\lambda t}$ に $\lambda = \frac{1}{\sqrt{n}}i$ を代入すると、 $e^{i\frac{1}{\sqrt{n}}it} = e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}t}$ となる一方、 $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{n}}i$ を代入すると、 $e^{\frac{1}{\sqrt{n}}t}$ である。

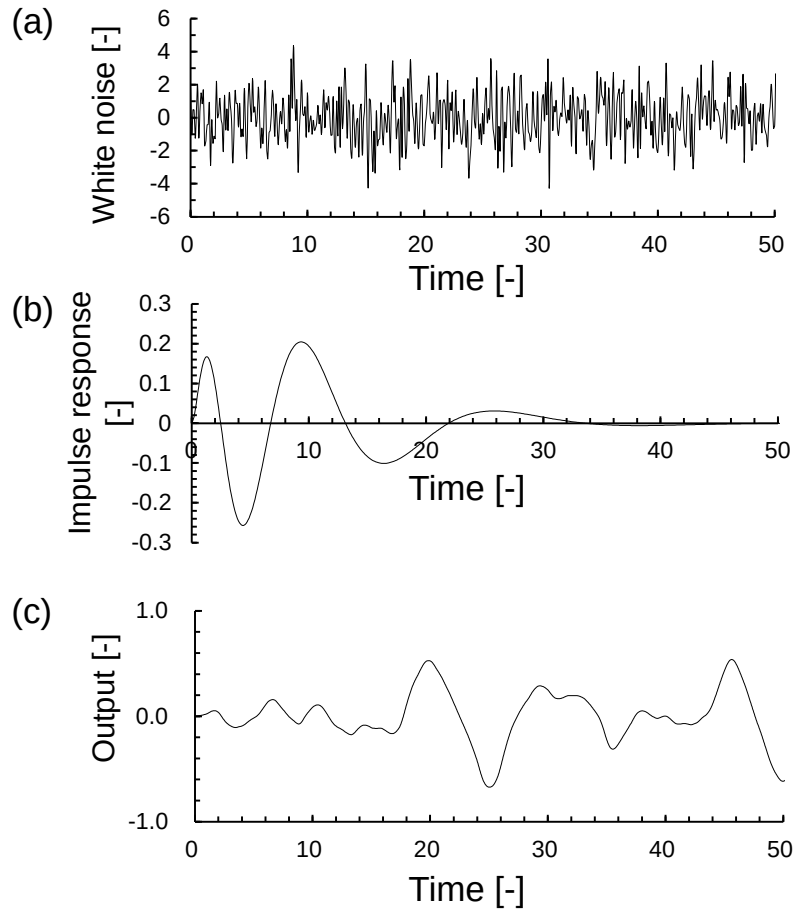


図 2.8 時系列：(a) 白色雑音、(b) インパルス応答、(c) 出力（たたみこみ積分）

白色雑音を利用する次の例題として (2.30) と同じかたちをしたパワースペクトル

$$S_{oo} = \frac{1}{\alpha^2 + (\omega - \omega_I)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\omega + \omega_I)^2} \quad (2.92)$$

を出力するシステムを考える。これを次の様に因子分解する。

$$\begin{aligned} S_{oo} &= \frac{2(\omega^2 + \alpha^2 + \omega_I^2)}{\{\alpha^2 + (\omega + \omega_I)^2\} \{\alpha^2 + (\omega - \omega_I)^2\}} \\ &= \frac{-\sqrt{2}i(\omega - i\sqrt{\alpha^2 + \omega_I^2})}{(\omega + \omega_I - \alpha i)(\omega - \omega_I - \alpha i)} \cdot \frac{\sqrt{2}i(\omega + i\sqrt{\alpha^2 + \omega_I^2})}{(\omega + \omega_I + \alpha i)(\omega - \omega_I + \alpha i)}. \end{aligned} \quad (2.93)$$

上平面に極をもつ因子を複素関数に拡張した

$$\frac{-\sqrt{2}i(\lambda - i\sqrt{\alpha^2 + \omega_I^2})}{(\lambda + \omega_I - \alpha i)(\lambda - \omega_I - \alpha i)} \equiv S'_{oo}{}^+(\lambda) \quad (2.94)$$

を周波数応答関数 $H(\lambda)$ と同一視し、 $H(\lambda)$ を逆フーリエ変換することでインパルス応答関数が得られる。

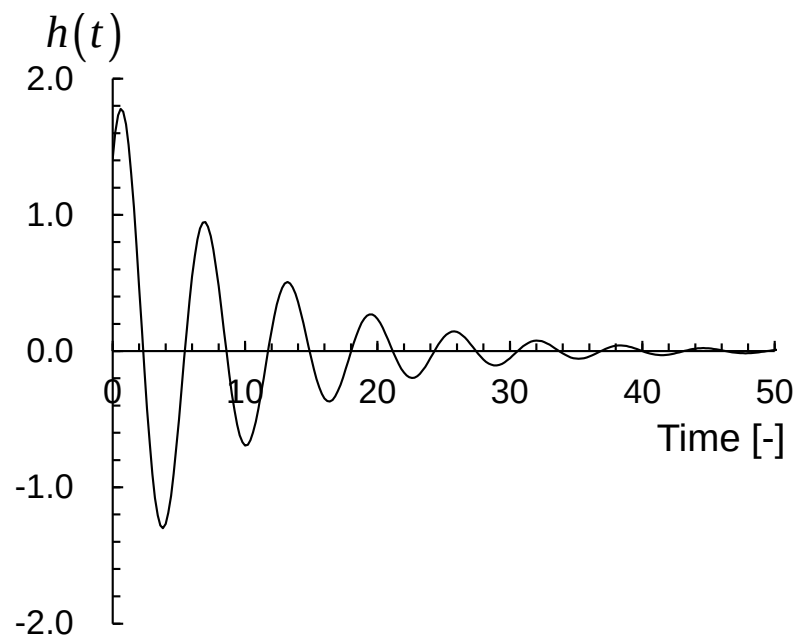


図 2.9 インパルス応答関数

演習問題 2-4.

(2.94) の逆フーリエ変換を実行しインパルス応答関数を t の関数として求めよ。

第3章

波エネルギー

本章のねらい：水波の理論、ベクトル解析などの知識から出発して、規則波のパワーを計算できるようにし、その方法を拡張するかたちで不規則波のパワーを計算できることを知る。

3.1 ●水波の理論

水波の理論では、応用数学が活躍する。波の振幅が微小と仮定することで、方程式系が線形化されている。これにより基礎解析的な取り扱いが可能となり、微分積分/ベクトル解析/特殊関数などの分野で知られている「公式」、「定理」を適用することができる。数学の問題を解いているかのように理論を展開していける。数学の教科書を読んだだけでは何の役にも立たないように思える「公式」や「定理」が役に立つ場所があったとすれば水波の線形理論はその典型例といえる。理論の帰結はシンプルな文字式である。その式の形を観察することで、直ちに物理現象の性質が理解できる。

大切なことは、身の周りで起きている現象を理解するために数学という道具をつかって目標とする解を得るために、先人がどのような戦略を適用したのかを追跡してみることである。答えにたどり着くためなら勇気をもって「仮定」、「近似」の名の下に数学的厳密性を犠牲にし、そのような紙と鉛筆（万年筆？）を駆使した努力の成果が水波の線形理論といえる。この理論の「美しさ」は厳密性の削ぎ落としにより現象の本質が丸見えになっている事と言い換えることができる。

最近の非線形現象への注目が示す通り、伝統的な筆記用具だけで現象を解明することが困難になるほどに複雑な現象をあつかうようになってきた昨今では、学校で習う「美しい」理論が、実は上記の犠牲のうえに成り立っていることも認識しておくことが大切である。摂動論/有限要素法/有限差分法などは、仮定や近似によって落とされた部分を再び拾い上げるための技法であるともいえる。これらの技法の多くは、紙と万年筆が知的作業ツールとしての主役をコンピュータに譲り渡すことで目の目を見た。数値シミュレーションとはコンピュータを使って、施されている近似が最も少ない方程式（プリミティブ方程式ということがある）の解を高速に求める方法のことである。この方

法を使わずして解決できない工学的・産業的課題があるため数値シミュレーションへの需要は下がることはないと思われる。筆者も自分の研究において使用しているから、コンピュータの画面をにらみプログラミングに勤しんでいる。

その反面、先述した「美しさ」という意味では、数値シミュレーションが土台とする方程式は「美しくない」ことになる。これは考察対象としている現象の本質（エッセンス）が露呈されないままになるからである。数値シミュレーションは解いている方程式の「美しさを」、出力される結果の豊富さでもって糊塗し、もうひとつ別の意味での「美しさ」を表現しようとする営みといえるのかもしれない。

以下、古典的な意味での「美しい」内容を扱っていく。

3.1.1 微小振幅波理論の解

水の運動は非粘性・非圧縮・渦無しと仮定する。水平面内 x 座標をとり、 x 軸正方向へ伝わる進行波の解を求める。鉛直上向きの z 座標をとり、静止した水面は $z = 0$ の面と一致し、海底面は $z = -h$ に位置する平らな水平面とする。紙面を奥に貫く向きの y 座標をとっておくが、この節の問題設定は xz 平面内でのみ波動を記述するため変数の y 依存性は考えない。以上の仮定と設定をふまえ次のように支配方程式と境界条件を表現する。

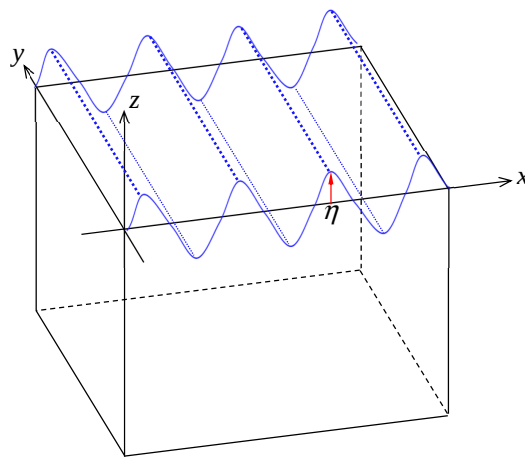


図 3.1 (x, y, z) 座標の定義。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + gz = f(t), \text{ where } f(t) \text{ is an arbitrary function.} \quad (3.2)$$

以下、この支配方程式を満足する速度ポテンシャルを求める。簡単化のため、速度ポテンシャルは微小と仮定し、微小量の2次以上の項は無視するものとする（これを線形化、線形近似という）。

上記の式のみでは解は一意に定まらない。この問題は典型的な境界値問題である。境界条件が既定されて初めて解を定めることができる。

境界条件1：海底面上において海底面を貫く向きの流れはゼロである。

境界条件2：海面（自由表面）に捕捉された流体粒子は海面上に存在し続ける。

境界条件3：自由表面上の圧力は大気圧に等しい。

境界条件1と2は運動学的境界条件、境界条件3は力学的境界条件とよばれる。

境界条件1を数式で表現しよう。

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \text{ on } z = -h \quad (3.3)$$

自由表面は $F(x, t) \equiv z - \eta(x, t) = 0$ で表される面である。その面上で満たされる境界条件2を数式で表現すると*1

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \text{ on } z = \eta \quad (3.5)$$

である。

境界条件3は、

$$p - p_0 = 0 \text{ on } z = \eta \quad (3.6)$$

であり、(3.2) 右辺の関数を $f(t) = \frac{p_0}{\rho}$ と選ぶことで、この境界条件は

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + g\eta = 0 \text{ on } z = \eta \quad (3.7)$$

*1 一般的な表現では、流速 (u, v, w) の流体中にある $F = 0$ 上で満たされる運動学的条件は、

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (3.4)$$

と書ける。

と表される。 ϕ に関して 2 次の項を無視すると、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0 \text{ on } z = \eta \quad (3.8)$$

となる（線形化された力学的境界条件）。

(3.5) および (3.8) を連立すると、

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \text{ on } z = \eta \quad (3.9)$$

を得る（線形化された運動学的および力学的境界条件）。この条件は $z = \eta$ で満たされる条件であるが、 $z = 0$ で満たされる条件、と近似できる^{*2}。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \text{ on } z = 0 \quad (3.11)$$

いま、 x 軸の正の向きに伝搬する進行波を考える。その振幅は、 $\Phi(z)$ で表される深さ方向（ z 方向）分布をもっているものとする。

$$\phi(x, z, t) = \Phi(z) \cos(kx - \omega t) \quad (3.12)$$

(3.12) を (3.1) に代入すると $\Phi(z)$ の満たす常微分方程式は

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} - k^2 \Phi = 0 \quad (3.13)$$

である。この式の一般解は

$$\Phi(z) = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz}, \text{ where } C_1 \text{ and } C_2 \text{ are arbitrary constants.} \quad (3.14)$$

と書けて、速度ポテンシャルは、

$$\phi = (C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz}) \cos(kx - \omega t) \quad (3.15)$$

である。未知定数を定めるため、現時点で適用していない境界条件 1 を適用しよう。

$$k(C_1 e^{kh} - C_2 e^{-kh}) \cos(kx - \omega t) = 0 \quad (3.16)$$

^{*2} $\phi(x, z = \eta, t)$ を $z = 0$ のまわりでテイラー展開すると

$$\phi(x, z = \eta, t) = \phi(x, z = 0, t) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0} \eta + O(\phi \eta^2) \quad (3.10)$$

となり、 ϕ と η に関して 2 次の微小量は無視する近似のもとでは $\phi(x, z = \eta, t) \simeq \phi(x, z = 0, t)$ としてよいからである。

となる。これが任意の時刻、任意の x 座標で成り立つから

$$\begin{aligned} C_1 e^{kh} - C_2 e^{-kh} &= 0 \\ \therefore C_1 e^{kh} &= C_2 e^{-kh} \equiv \frac{1}{2}C \end{aligned} \quad (3.17)$$

が成り立つ。ここで導入した C を使うと ϕ は

$$\phi = C \cosh \{k(z+h)\} \cos(kx - \omega t) \quad (3.18)$$

という風に双曲線関数を用いて表すことができる。

(3.8) から、

$$\eta(x, t) = A \sin(kx - \omega t), \quad (3.19)$$

$$A = -\frac{C\omega}{g} \cosh(kh) \quad (3.20)$$

である。ここで、 A は水面波の振幅である。

ここで位相速度 c という物理量を用いる。 c は ω と k との比、すなわち

$$c \equiv \frac{\omega}{k} \quad (3.21)$$

と定義される。

(3.11) に速度ポテンシャルの解を代入すると、

$$\omega = \sqrt{gk \tanh(kh)} \quad (3.22)$$

を得る。この式は振動数 ω と波数 k との間に成り立つ関係を規定しており分散関係 (dispersion relation) とよばれる。

演習問題 3-1.

分散関係の「分散」の意味を説明せよ。

(無次元化した) 波数 kh と (無次元化した) 周波数 $\sqrt{\frac{h}{g}}\omega$ との関係をプロットすると (3.2) の様になる。

(3.22) を用いると、位相速度 c は、

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)} \quad (3.23)$$

と表すことができる。ここで $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ は波長、 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ は周期である。多くの教科書では (3.23) の

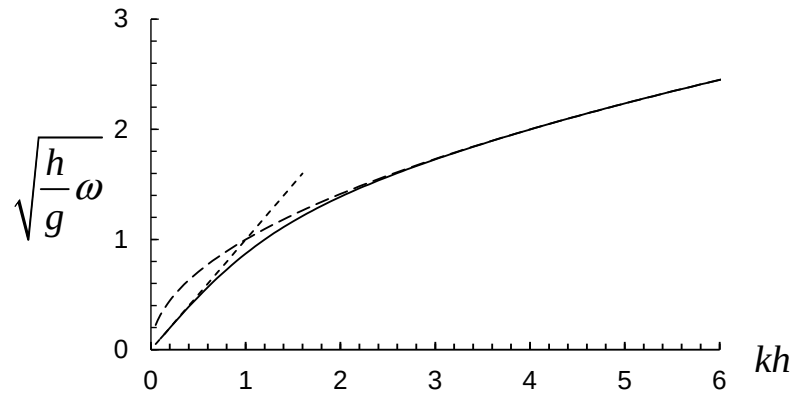


図 3.2 分散関係

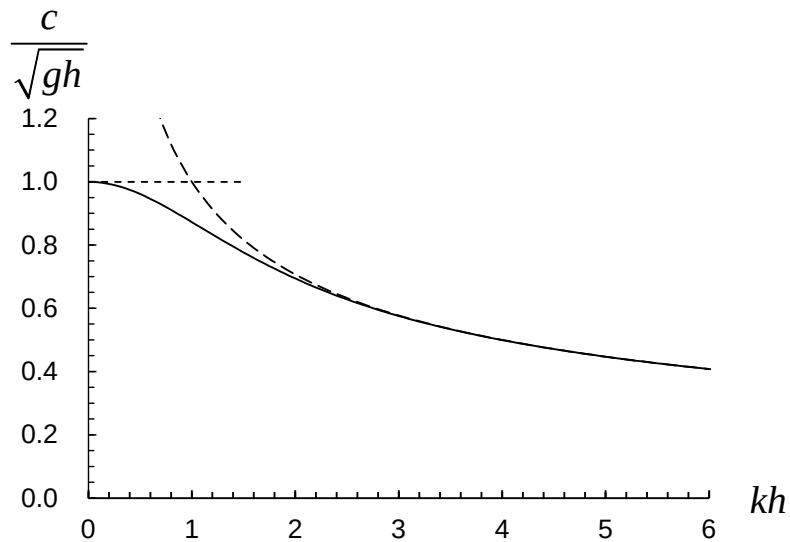


図 3.3 位相速度

様に c を表すことが多い。この式の持つ物理的な意味をもう少し明らかに表現できるように書き換えることができる。

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = \sqrt{\frac{\tanh(kh)}{kh}}. \quad (3.24)$$

位相速度 c の $\sqrt{gh}$ に対する比が、 kh という量のみの関数として書ける。ここで留意すべきことは $kh = 2\pi\frac{h}{\lambda}$ が λ と h との比を表していること、および、それゆえに無次元であることである。

海は何に対して深いのか？

深い海

「深い海のように」、「しんかい」、「deep sea」という表現がある。そこに未知、神秘を感じさせる。

最も深い海溝であっても、地球の直径と比較すると海底地殻という薄皮上のうっすらとした溝にすぎない。では、何を根拠に理屈好きな僕らは「海は深い」と主張できるのか？理工系の素養をもった人間はこの問いに対して解答をつくることができなくてはならない。「深い」の物理的な定義は、海底の水深が波の波長に対して十分に長いという意味である。その場合、無次元数 kh は非常に大きい数となる。では、何をもって「非常に大きい」と主張できるのか？上で、 kh は比 (ratio) だと説明した。もし、ある分数があって分母の大きさと分子の大きさとが同程度なら、その分数は1程度の大きさとなるだろう。なお、 kh には $2\pi \approx 6.3$ が掛かっているため、波長と水深との比が1程度でも、6程度の値になりはするが、桁は1と同程度であるため 2π の存在は大雑把な桁評価をする際にはそんなに注視する必要はない。「 kh が非常に大きい」とは、 kh が1に比べて非常に大きいという風に、やや厳密化できる。それを $kh \gg 1$ と書く。これは同時に、水深 (分子) に比べて波長 (分母) が非常に短いということも意味している。この意味で $kh \gg 1$ である性質を持つ波を短波という。

浅い海

上述の議論に沿えば「海は浅い」とは $kh \ll 1$ を満たすことである。この場合、波長は海底の水深に比べて長いため、長波といわれる (潮汐波、津波などが該当する)。

海が深い (波長が相対的に短い) という条件下では、 c は次のように近似できる^{*3}。

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}}, \quad (3.25)$$

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = \frac{1}{\sqrt{kh}}. \quad (3.26)$$

このとき、周期 T と波長 λ との間には

$$\frac{\lambda}{gT^2} = \frac{1}{2\pi} \quad (3.27)$$

という関係が成り立つ。

^{*3} $\tanh(x) \rightarrow 1$ if $x \gg 1$.

一方、海が浅い（波長が相対的に長い）という条件下では、 c は

$$c = \sqrt{gh}, \quad (3.28)$$

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = 1 \quad (3.29)$$

と近似できる*4。

A 、 c および (3.22) を用いると、速度ポテンシャルは次の様にかかる。

$$\begin{aligned} \phi(x, z, t) &= -A \frac{g}{\omega \cosh(kh)} \cosh\{k(z+h)\} \cos(kx - \omega t) \\ &= -\frac{Ac}{\sinh(kh)} \cosh\{k(z+h)\} \cos(kx - \omega t). \end{aligned} \quad (3.30)$$

3.1.2 群速度の数学的導入

波動理論では群速度（group velocity）という概念がある。波のもつエネルギーやパワーを考える際に重要となる量である。したがって、波のエネルギーおよびパワーについて学修していく中で群速度の概念を捉えることが本来は望ましい。ところが、多くの教科書では群速度について、これとは異なる方法で導入していることが多い。すなわち、性質が類似している2つの波を想定し、それらの重ね合わせの結果として生じる合成波の性質として群速度が定義付けられている。この導入では非常に簡易な数学のみが使われるため、その手続きを追うことは比較的易しい。また、波のエネルギーやパワーの計算には、やや複雑な式変形が要求されるため、数学的に簡単な方法から最初に採用するという意味では、エネルギー/パワーの側面からの意味付けを後回しにすることはある程度致し方なしといえるのかもしれない。

その反面、そもそも「性質が類似している2つの波」を想定する必然性の説明が難しいため、物理量としての群速度が有している意味（群速度が波動という物理現象の一側面を規定するその役割）が把握し難い。

この資料では最初に、式変形の容易さを重視している多くの教科書と同様の方法で、群速度を導入する。ただし、ここでの導入は上述の通り、群速度の数学的導入であるにすぎないことを認識しておく必要がある。別途、それを物理的に導入する。

二つの正弦波

$$\eta_1 = A \sin(kx - \omega t), \quad (3.31)$$

$$\eta_2 = (A + \delta A) \sin\{(k + \delta k)x - (\omega + \delta \omega)t\} \quad (3.32)$$

*4 $\tanh(x) \simeq x$ if $x \ll 1$.

が共存している状況を想定する*5。 η_1 、 η_2 の（振幅、波数、振動数）はそれぞれ (A, k, ω) 、 $(A + \delta A, k + \delta k, \omega + \delta \omega)$ である。ただし、 $\delta A \ll A$ 、 $\delta k \ll k$ 、 $\delta \omega \ll \omega$ であるとする。

この二つの波を重ね合わせり形成される合成波の波高は、次の様に計算される。

$$\begin{aligned}\eta &= \eta_1 + \eta_2 \\ &= 2A \cos \left\{ \frac{1}{2}(\delta k \cdot x - \delta \omega \cdot t) \right\} \sin \left\{ \left(k + \frac{\delta k}{2} \right) x - \left(\omega + \frac{\delta \omega}{2} \right) t \right\} \\ &\quad + \delta A \sin \{ (k + \delta k)x - (\omega + \delta \omega)t \}.\end{aligned}\tag{3.33}$$

微小量（ δ のついた量）に関して 0 次の項のみをのこすと、 η は次の様に近似できる。

$$\begin{aligned}\eta &\simeq 2A \cos \left\{ \frac{1}{2}(\delta k \cdot x - \delta \omega \cdot t) \right\} \sin(kx - \omega t) \\ &= \underline{2A \cos \left\{ \frac{1}{2}\delta k \left(x - \frac{\delta \omega}{\delta k} t \right) \right\} \sin(kx - \omega t)}\end{aligned}\tag{3.34}$$

と書き表せる。この式は波数 k 、振動数 ω の波 $\sin(kx - \omega t)$ （基本波という）が進行することを表しており、下線部分がその振幅に相当する。ただし、この振幅は一定ではないことに注意が必要である。この振幅自体が $\frac{4\pi}{\delta k}$ という波長、 $\frac{4\pi}{\delta \omega}$ の振動数をもつ進行波である。振幅が変動することによって、基本波が長さ $\frac{2\pi}{\delta k}$ の波群に区切られている。これらの波群が x の正方向に、基本波に比べて非常に遅い速度で進行する。その進行速度は

$$\frac{\delta \omega}{\delta k} \simeq \frac{d\omega}{dk} \equiv c_g\tag{3.35}$$

である。これが群速度であり、それを c_g と表す。

分散関係が (3.22) で表される微小振幅波では、群速度の位相速度に対する比を kh の関数として以下の様に書くことができる。

$$\frac{c_g}{c} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right).\tag{3.36}$$

短波（深海波）近似が適用できる条件（ $kh \gg 1$ ）では、この比は

$$\frac{c_g}{c} = \frac{1}{2}\tag{3.37}$$

と近似できる。

また、長波（浅水波）近似が適用できる条件（ $kh \ll 1$ ）では、

$$\frac{c_g}{c} = 1\tag{3.38}$$

*5 この想定があまりに天下りのなものは上述の通り。

と近似できる*6。

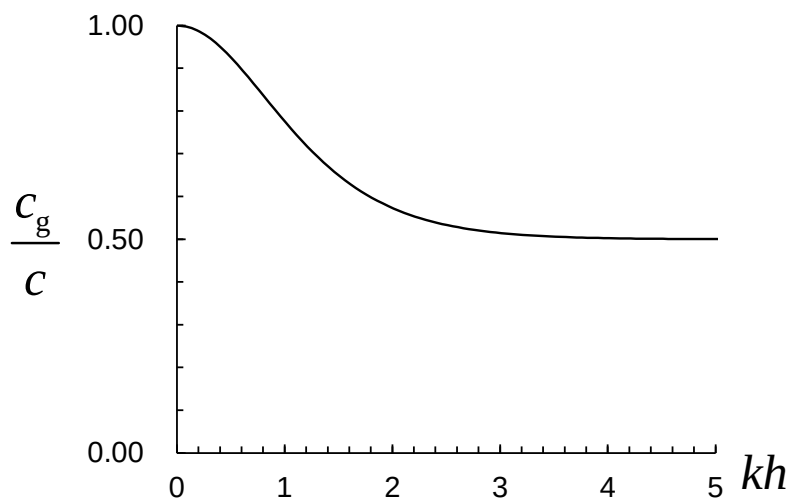


図 3.4 群速度の位相速度に対する比。

上記の説明で確かに波群は群速度で移動することが数学的には理解される。数学モデル（数理モデル）は適用している近似の範囲内では嘘をつかないので、「数学モデルの解は実際に起こる物理現象を表現している」という理解は妥当である。しかし、数学は人間の解釈にすぎず、現象側が数学を「知っている」わけではないので、数学嫌いな人あるいは現象を現象として捉えたい人は納得し切れないかもしれない。そこで、なるべく物理的考察のみから「群速度が波群の移動速度」であることを納得することを試みてみたい。

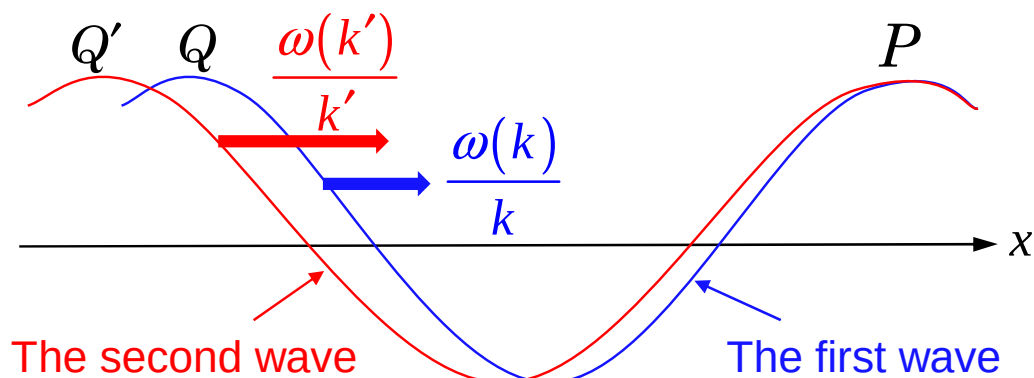


図 3.5 群速度

最大振幅を与える波数 k_0 近傍の波数 k （第1の波）と k' （第2の波）をもつ2つの素成波を考え

*6 $\sinh(x) \simeq x$ when $x \ll 1$.

る。 $k > k'$ と仮定しておく。この2つの素成波が時刻 t に空間の点 P においてともに極大となり（つまり同位相になり）強め合ったと仮定する。この瞬間、2つの波の波長は異なるので、互いの位相差は点 P から離れるにつれて増加する。点 P から第1の波の1波長分 $\frac{2\pi}{k}$ だけ後方の点を Q とする。点 P から第2の波の1波長分 $\frac{2\pi}{k'}$ だけ後方の点 Q' は、 Q よりも

$$\Delta x = 2\pi \left(\frac{1}{k'} - \frac{1}{k} \right) \quad (3.39)$$

だけさらに後方に位置する。位相速度の差は、

$$\Delta c = \left\{ \frac{\omega(k')}{k'} - \frac{\omega(k)}{k} \right\} \quad (3.40)$$

であるから、第1の波とともに前進する観測者からみれば点 Q' はこの相対速度で点 Q を追いかけ、時刻 $t + \frac{\Delta x}{\Delta c}$ に追いつく。したがって時刻 t に P にあった強め合いの点は、時刻 $t + \frac{\Delta x}{\Delta c}$ に Q に後退したように見える。ただし、この間に Q 自体が位相速度 $\omega(k)/k$ で前進しているから、波の強め合いの点は静止した陸からみれば、

$$\frac{\omega(k)}{k} \frac{\Delta x}{\Delta c} - \frac{2\pi}{k} \quad (3.41)$$

だけ正味、前進したことになる。この量を経過時間 $\frac{\Delta x}{\Delta c}$ で割った量が「強め合う点の移動速度」となる。その量を計算してみると、

$$\begin{aligned} \frac{\omega(k)}{k} - \frac{2\pi}{k} \frac{\Delta c}{\Delta x} &= \frac{\omega(k)}{k} - \frac{2\pi}{k} \frac{\left\{ \frac{\omega(k')}{k'} - \frac{\omega(k)}{k} \right\}}{2\pi \left(\frac{1}{k'} - \frac{1}{k} \right)} \\ \rightarrow \frac{\omega(k)}{k} - \frac{1}{k} (-k^2) \frac{d}{dk} \left\{ \frac{\omega(k)}{k} \right\} &= \frac{\omega(k)}{k} + k \frac{d}{dk} \left\{ \frac{\omega(k)}{k} \right\} = \frac{d\omega(k)}{dk}, \quad k' \rightarrow k \end{aligned} \quad (3.42)$$

となり、以前に求めた群速度の定義と一致する。つまり群速度とは振幅の大きい部分が移動する速度と理解される。

3.2 ●波のエネルギー

x 軸、それと直角方向 (y 軸) に単位長さ、 z 軸方向には水面から水底までの長さをもつ立体 V を考え、この V 内に満ちている流体の有するエネルギーを評価する。なお、 V を海洋と捉えるなら海水は熱エネルギーを貯蔵しているから、評価には熱エネルギーも加算するべきである。しかし、ここでは簡単のため力学的エネルギー（運動エネルギー K と位置エネルギー P ）のみを考慮するものとする。

流体が渦なしであるとの仮定を適用し速度ポテンシャルにより流速ベクトル $\mathbf{u}$ を求められるものとすれば、 V 全体での運動エネルギーは次の様に計算できる。

$$K = \int_V \frac{\rho}{2} |\mathbf{u}|^2 dV = \int_V \frac{\rho}{2} |\nabla \phi|^2 dV. \quad (3.43)$$

V 全体での位置エネルギーは、

$$P = \int_V \rho g z dV \quad (3.44)$$

である。ただし位置エネルギーの基準を $z = 0$ (静止水面) としている。

よって V 全体での力学的エネルギー E は

$$E = K + P = \int_V \left\{ \frac{\rho}{2} |\nabla \phi|^2 + \rho g z \right\} dV \quad (3.45)$$

と書ける。ここで、 ρdV が微小体積 dV の質量であることを認識しておくことが重要である。

上記では、 V 内での体積積分を一重積分のかたちで書いているが、本当は積分計算には3重積分となることを留意しておこう。前節までに求めた速度ポテンシャルの解を代入して、実際に計算してみよう。領域 V の x 軸方向の長さを δx (非常に短い長さ) とした部分 δV を考える。 δV 内の運動エネルギーは、

$$\frac{\rho}{2} \int_0^1 dy \int_0^{\delta x} dx \int_{-h}^0 \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} dz \quad (3.46)$$

と計算できる。なお、ここで z 積分の上限を $z = 0$ (静止水面) としているのは、ある近似を適用しているためである*7。 y 積分については、1 となるだけなので陽に書かなくてもよい。(3.46) の一

*7 本来は静止水面までではなく自由表面まで積分するべきなので、

$$\int_{-h}^{\eta} |\nabla \phi|^2 dz \quad (3.47)$$

としなければならない。ただ、この積分は、

$$\int_{-h}^{\eta} |\nabla \phi|^2 dz = \int_{-h}^0 |\nabla \phi|^2 dz + \int_0^{\eta} |\nabla \phi|^2 dz \quad (3.48)$$

のように分割でき、右辺第2項は、 $|\nabla \phi|^2 \eta$ 程度であり微小量 ϕ 、 η に関して3次の大きさである。これは右辺第1項 (微小量 ϕ 、 η に関して2次) と比較すると十分に小さいといえる。力学的エネルギーを (3.45) の様に書き表した時点で、 E は微小量に関して2次の量となると算段しておくことが肝要である。

周期平均は、

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi/\omega} \int_{t=0}^{t=\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\rho}{2} \left(\frac{Ack}{\sinh(kh)} \right)^2 \int_0^{\delta x} dx \int_{-h}^0 [\sin^2(kx - \omega t) + \sinh\{k(z+h)\}] dz dt \\
 &= \frac{\rho}{2} A^2 g k \frac{\tanh(kh)}{\sinh^2(kh)} \delta x \left[\frac{h}{2} + \frac{1}{2} \left\{ -h + \frac{1}{2k} \sinh(2kh) \right\} \right] \\
 &= \frac{1}{4} \rho g A^2 \delta x
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

であるから、単位 xy 平面（水平面）あたりの運動エネルギー K' は

$$K' = \frac{1}{4} \rho g A^2 \tag{3.50}$$

と書ける。

同様に、 δV 内の位置エネルギーの一周期平均は、

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi/\omega} \int_{t=0}^{t=\frac{2\pi}{\omega}} \rho g \int_0^{\delta x} dx \int_{-h}^{\eta} z dz dt \\
 &= \frac{1}{2\pi/\omega} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\rho}{2} g \int_0^{\delta x} (\eta^2 - z^2) dx dt \\
 &= \frac{\rho}{2} g \frac{1}{2\pi/\omega} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{\delta x} \{A^2 \sin^2(kx - \omega t) - h^2\} dx dt \\
 &= \frac{\rho}{2} g \left(\frac{A^2}{2} - h^2 \right) \delta x.
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

である。単位 xy 平面（水平面）あたりの位置エネルギー P' は

$$P' = \frac{\rho}{2} g \left(\frac{A^2}{2} - h^2 \right) \tag{3.52}$$

である。

以上より、単位 xy 平面（水平面）あたりの全エネルギーの一周期平均 $\bar{E}$ は、

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \rho g A^2 - \frac{1}{2} \rho g h^2 \tag{3.53}$$

となる。右辺第2項は静止した水がもつ位置エネルギーで波がなくても存在する（海底面上に静止した体積 δV の水柱がもつ位置エネルギー）。したがって、波のエネルギーのみ（換言するなら静止状態からの変化量のみ）を評価しようとしている今は、右辺第1項のみを考慮すれば十分であるから右辺第1項のみを残し、さらに波高 H を用いた表現に書き換えると、

$$E = \frac{1}{2} \rho g A^2 = \frac{1}{2} \rho g \left(\frac{H}{2} \right)^2 = \frac{1}{8} \rho g H^2 \tag{3.54}$$

となる。

なお、位置エネルギーの z 積分 $\int_{-h}^{\eta} z dz$ においては、運動エネルギー K の計算のときにそうしたからといって、直ちに積分の上端を 0 にしてはいけないことに注意しよう。なぜなら、この積分を

$$\int_{-h}^{\eta} z dz = \int_{-h}^0 z dz + \int_0^{\eta} z dz \quad (3.55)$$

のように分割したとき、右辺第 1 項は微小量に関して 0 次、第 2 項は η^2 程度 ($z \sim \eta$ 、 $dz \sim \eta$) であり、これは運動エネルギー（微小量に関して 2 次の量）に比べて無視できない量だからである。

3.2.1 改めて群速度

群速度が波の包絡線の移動速度であることは説明した。しかし、その物理的な意味付けは明確には行っていない。

振動数 ω あるいは波数 k を定数として導出した微小振幅波の解 (3.30) を拡張することで群速度の理解を深めてことを試みる。定数としてあつかった振幅 A を波数 k の関数とする。ここで、ある特定の波数 k_0 でのみ振幅が大きく、 k_0 から離れた波数においては振幅波小さいものと仮定する。

$$A(k) = A_0 e^{-\alpha(k-k_0)^2}. \quad (3.56)$$

この仮定および分散関係 (3.22) を用いて速度ポテンシャルを書き換える。波数 k の関数として速度ポテンシャルを ϕ^* と表すと

$$\phi^* = -A_0 \frac{\sqrt{gh}}{\sqrt{kh \tanh(kh)}} \frac{\cosh\{k(z+h)\}}{\cosh(kh)} e^{-\alpha(k-k_0)^2} e^{i(kx-\omega(k)t)}. \quad (3.57)$$

この解を色々な波数 k をもつ素成波を重ね合わせることで、言い換えれば、 k に関して ϕ^* を積分することで、さらに言い換えれば ϕ^* を波数 k に関して フーリエ逆変換することで、地点 x の関数として ϕ を計算する。

$$\begin{aligned} \phi &= \int_{-\infty}^{\infty} -A_0 \frac{\sqrt{gh}}{\sqrt{kh \tanh(kh)}} \frac{\cosh\{k(z+h)\}}{\cosh(kh)} e^{-\alpha(k-k_0)^2} e^{i(kx-\omega(k)t)} dk. \\ &= -A_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{gh}}{\sqrt{kh \tanh(kh)}} \frac{\cosh\{k(z+h)\}}{\cosh(kh)} e^{\{-\alpha(k-k_0)^2 + i(kx-\omega(k)t)\}} dk. \end{aligned} \quad (3.58)$$

周波数は、特定の波数 k_0 の近傍のみを考慮に入れば十分と考え、 k_0 まわりのテーラー展開の 1 次項までで近似する。

$$\omega(k) \simeq \omega(k_0) + \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_0} (k - k_0). \quad (3.59)$$

$\kappa \equiv k - k_0$ と定義し、指数関数の肩を以下の様を書く。

$$\begin{aligned} & -\alpha\kappa^2 + i \left(x - \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k_0} t \right) \kappa + i(k_0 x - \omega(k_0)t) \\ &= -\alpha \left(\kappa - \frac{\lambda}{2\alpha} i \right)^2 - \frac{\lambda^2}{4\alpha} + i(k_0 x - \omega(k_0)t), \\ & \text{where, } \lambda \equiv x - \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k_0} t. \end{aligned}$$

指数関数に掛かっている部分を k の関数として、

$$F(k) \equiv -\frac{1}{\sqrt{kh \tanh(kh)}} \frac{\cosh \{k(z+h)\}}{\cosh(kh)} \quad (3.60)$$

とおくと、 ϕ は

$$\phi = A_0 \sqrt{gh} e^{-\frac{\lambda^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \exp \left\{ -\alpha \left(\kappa - \frac{\lambda}{2\alpha} i \right)^2 \right\} d\kappa e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)} \quad (3.61)$$

と書ける。指数関数の肩の部分は、 $\kappa = \frac{\lambda}{2\alpha} i$ のとき、すなわち $k = k_0 + \frac{\lambda}{2\alpha} i$ のとき最大となる。そのため、被積分関数は $k = k_0 + \frac{\lambda}{2\alpha} i$ の近傍でのみ大きな値をとり、それ以外の領域では急激にゼロに近づく。また、 k の変化に対して $F(k)$ は指数関数と比べ、ずっとゆっくりと変動するため $F(k)$ は $k = k_0 + \frac{\lambda}{2\alpha} i$ における値 $F(k_0 + \frac{\lambda}{2\alpha} i)$ で近似的に置き換えることができる。また $\alpha \gg 1$ であることから、複素数 $k = k_0 + \frac{\lambda}{2\alpha} i$ は、ほぼ実数 k_0 で近似することができる。以上より、

$$\phi \sim A_0 \sqrt{gh} e^{-\frac{\lambda^2}{4\alpha}} F(k_0) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\alpha \left(\kappa - \frac{\lambda}{2\alpha} i \right)^2 \right\} d\kappa e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)}. \quad (3.62)$$

次の積分を実行^{*8}すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\alpha \left(\kappa - \frac{\lambda}{2\alpha} i \right)^2 \right\} d\kappa = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (3.63)$$

であるから、 ϕ は

$$\phi \sim A_0 \sqrt{gh} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp \left\{ -\frac{\left(x - \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k_0} t \right)^2}{4\alpha} \right\} F(k_0) e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)} \quad (3.64)$$

^{*8} 複素関数の定理を用いる。

と表せる。この式は座標 $x = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} t$ の地点に最大振幅をもつ波群を表している。この波群は速度 $\left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0}$ で進行する。2つの素成波の重ね合わせから導いた (3.35) と同じ意味をもつ物理量である。この節の説明は、(3.35) を導いたのと同じ理屈を一般化したものといえる。

無次元化の練習

本節で導入した波束分布 (3.56) には、 α という、「非常に大きい」とだけ仮定したパラメータがあった。式の無次元化を通じてこのパラメータのもつ意味を見出しておく。波数 k は、水深 h と波長 $\frac{2\pi}{k}$ との比に比例する量 kh によって置き換える。この方針で (3.56) を書き換える。

$$\begin{aligned} A(k) &= A_0 \exp \{ -\alpha(k - k_0)^2 \} = A_0 \exp \left\{ -\alpha \frac{1}{h^2} (kh - k_0 h)^2 \right\} \\ &= A_0 \exp \left\{ -\frac{(k' - k'_0)^2}{s'^2} \right\}, \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\text{where, } k' \equiv kh, \quad k'_0 \equiv k_0 h, \text{ and } s' \equiv \frac{h}{\sqrt{\alpha}}$$

(3.56) 式を立てた時点で、 α は (長さ)² の次元をもつ量であった。そのことが s' の定義により明瞭に表される。 $k = k_0$ に分布の極大をもつ波束分布の横幅の広がりを既定している量が s' であり、これを敢えて次の様に書くと、

$$s' = \frac{k_0 h}{k_0 \sqrt{\alpha}} \quad (3.66)$$

これは、無次元化した卓越波数 $k_0 h$ の、無次元化した基準波数 $k_0 \sqrt{\alpha}$ に対する比であるから α が大きいことは、 $\sqrt{\alpha}$ が水深 h よりも非常に長いこと、基準波数が大きいことを意味する。波長の言葉で言い換えるなら、卓越する波長 $2\pi/k_0$ に比して $\sqrt{\alpha}$ は非常に長いこと、と解釈できる。

基準となる量

ここでの考察に用いた無次元化はしばしば有効または必要なので、説明を加える。時間と空間に依存する変数をあつかう際には、発生する物理現象のもつ典型的な時間スケール T と長さスケール L を基準として選ぶことが肝要で、なるべく単純な式で表せるものが望ましい。今考えている微小振幅波では、 T として浅水波が水深と同じ長さを伝搬するのに要する時間、 L として水深を基準として選ぶことにする。

$$T = \frac{h}{\sqrt{gh}} = \sqrt{\frac{h}{g}} \quad (3.67)$$

$$L = h. \quad (3.68)$$

この基準量を用いて速度ポテンシャル ϕ を無次元化する。無次元化した量には上付き添え字' を付す (ここでは微分の意味ではないことに注意)。

$$\phi' \sim -A_0' F'(k') \exp \left\{ -\frac{(k' - k_0')^2}{s'^2} \right\} \quad (3.69)$$

3.3 ●波のパワー

波力発電器は波のもつ力学的エネルギーの一部を吸収している。ゆえに、波力発電器を改良するためには吸収されるエネルギーを大きくすればよい、と普通は考える。この考えは基本的に正しいのだが、より厳密には、単位時間あたりに吸収できるエネルギーを大きくすればよい、という表現が相応しい。力学的エネルギーは時々刻々変化する。単位時間辺りの変化率、すなわちパワーこそ、波力発電の効率に直接関係している物理量である。この節では波のパワーについて学修しよう。

3.3.1 輸送定理

立体 V 内に含まれている量の単位時間当たりの変化率を計算するには、時間微分を計算することになる。「立体 V 内に含まれている量」は微小体積 dV に含まれる微小量を V 全体で体積積分することで得られる。したがって体積積分を時間微分することになる。ここで、流体表面などのように形状が変化する表面を有する立体の場合、その形状変化を考慮した微分を実行しなければならない。このことを式で表現した輸送定理を本節で証明しておく。^{*9}

^{*9} 本節の記述は、J.N.Newman 著 “Marine Hydrodynamics” の 3.3 節を参考としている。この本は 1977 年に出版された船舶流体力学の業界では有名な本である。本資料作成者がこの本を読んだのは 30 歳近くになってからだったが、論文調英語のお手本のような英文で書かれており、流体力学はもとより英語の勉強に役立ったという印象が強い。

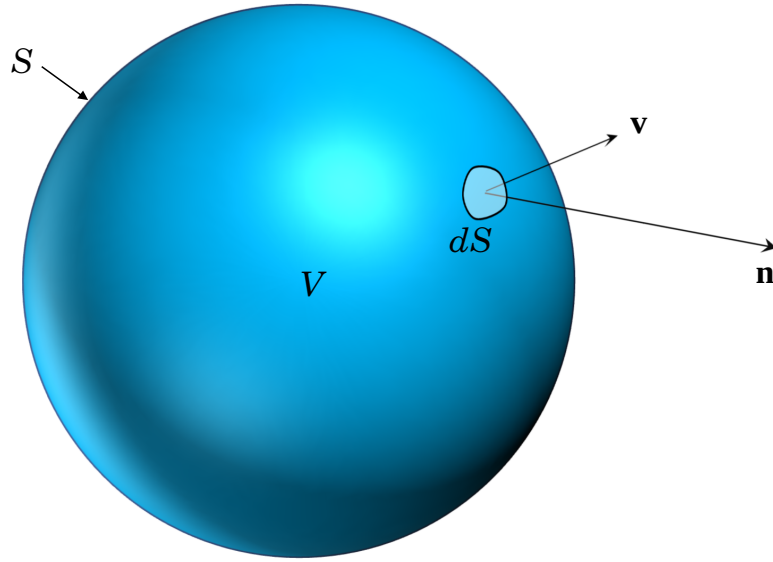


図 3.6 領域 V （流体で満たされている）および表面 S （変形する）。 dS は外向き法線ベクトル $\mathbf{n}$ をもつ S 上の微小領域であり速度ベクトル $\mathbf{v}$ で移動している。

微分可能で空間座標 $\mathbf{x}$ と時間 t の関数 $f(\mathbf{x}, t)$ をある領域 $V(t)$ にわたって積分する。この積分領域は時間の経過にしたがい変化するので $V(t)$ と記す。 $V(t)$ の表面も時間変化するので $S(t)$ と記す。以下で定義される積分 I の時間変化を計算する。

$$I(t) = \iiint_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) dV \quad (3.70)$$

時間の長さ Δt 間における変化量は、

$$\Delta I \equiv I(t + \Delta t) - I(t) = \iiint_{V(t+\Delta t)} f(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV - \iiint_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) dV. \quad (3.71)$$

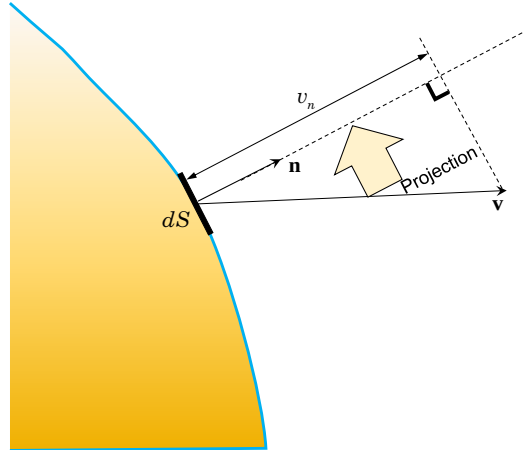
関数 $f(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ を t のまわりでテーラー展開し、 Δt の二次以上の項を無視すると

$$f(\mathbf{x}, t + \Delta t) \simeq f(\mathbf{x}, t) + \Delta t \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t}. \quad (3.72)$$

時刻が t から $t + \Delta t$ まで経過する間に積分領域は $V(t)$ から $V(t + \Delta t)$ へと変化する。その変化量を ΔV とおくと、

$$V(t + \Delta t) = V(t) + \Delta V \quad (3.73)$$

である（ V の形状が球状とし、 V が Δt の間に少し膨らんだとすると Δt は薄い球殻（薄膜）となる

図 3.7 $v_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$.

ことをイメージしてみよう)。 Δt を用いて ΔI を表すと

$$\begin{aligned}\Delta I &= \iiint_{V+\Delta V} \left(f + \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} \right) dV - \iiint_V f dV \\ &= \Delta t \iiint_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iiint_{\Delta V} f dV + O[(\Delta t)^2]\end{aligned}\quad (3.74)$$

である。 ΔV は、面 $S(t)$ と面 $S(t + \Delta t)$ との間に挟まれている薄膜である。この膜の厚みは、面 $S(t)$ が時間 Δt の間に移動するベクトルの法線成分に等しく、その長さは $v_n \Delta t$ である。よって、この法線方向の積分は Δt に関して 1 次の量となる。この薄膜内の法線方向に沿って f はゼロ次の量 $f(\mathbf{x}, t)$ で一定と近似できる。これらのオーダー見積りを踏まえると、法線方向の積分は $f v_n \Delta t$ と近似できる。法線方向積分を先に実行すると、

$$\Delta I = \Delta t \iiint_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iint_S f (v_n \Delta t) dS + O[(\Delta t)^2]\quad (3.75)$$

と書ける。両辺を Δt で割り、極限 $\Delta t \rightarrow 0$ を取ると、

$$\frac{dI}{dt} = \iiint_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iint_S f v_n dS\quad (3.76)$$

を得る。これは輸送定理とよばれる。右辺第2項は境界 S が単位時間移動することによって領域 V の外から中へ入ってくる f の量である。この講義で考えている領域 V は流体に満たされている。先述した境界条件1（少し表現を変えると、「境界上にある流体粒子は境界上にあり続ける」）は運動学的条件とよばれる。この条件をさらに翻訳すると、「面 S の運動速度の法線成分と、その面の近傍にある流体粒子の速度の法線成分とは等しい」と表現される（もし、この条件が破られた状態を想像してみてほしい。面と流体との間に何も無い空間が生じるか、流体が面を突き抜けることにな

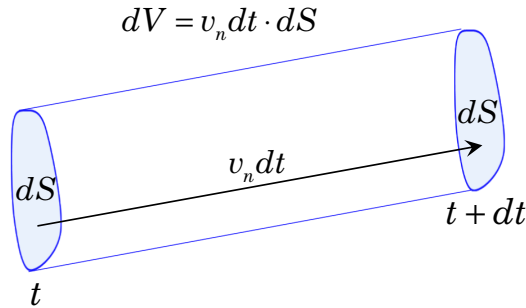


図 3.8 .

るはずだが、これらはいずれも不合理である。前者は領域 V が流体で満たされるという前提条件に反し、後者は面が境界であるという前提条件に反するからである)。この条件を数式で表現すると、

$$v_n - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (3.77)$$

と書ける。(3.77) を用いると、(3.76) は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_V f dV &= \iiint_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iint_S f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \iiint_V \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \mathbf{v}) \right\} dV. \end{aligned} \quad (3.78)$$

最後の式変形ではガウスの発散定理^{*10}を用いた。

演習問題 3-2.

f を、海水中に溶けている或る物質の濃度（単位体積当たりの質量）と仮定してみよう。 $f \mathbf{v}$ 、 $f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ 、 $\nabla \cdot (f \mathbf{v})$ 、 $\nabla \cdot (f \mathbf{v}) dV$ 、 $\frac{\partial f}{\partial t} dV$ のそれぞれの物理的意味に関する説明を試みよ。

^{*10} ガウスの発散定理：表面 S をもつ領域 V 内で定義されたベクトル $\mathbf{v}$ 、表面 S 上の単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ に対し次の関係が成り立つ。

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV = \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (3.79)$$

運動学的条件の一般的表現

座標空間 (x, y, z) の中にある面を表す方程式は一般的に $f(x, y, z, t) = 0$ と書ける。面は移動するため左辺の関数 f は時間 t の関数でもある。

例えば、原点を中心とする半径 a の移動しない球面は、 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ である。もし、あなたがこの球面上を走り回るなら、あなたは常に $f = 0$ を満たしながら移動することになる。もし、面を突き破って球内に潜り込んだら $f < 0$ となり、跳躍をすると $f > 0$ となってしまう、「面上」という条件が破られる。

先に、自由表面上での運動学的境界条件を「海面（自由表面）に捕捉された流体粒子は海面上に存在し続ける」と表現した。面が固体でも液体でも「面上に存在し続ける」ことは変わらない。ここでは、このことを数学的に統一的に表現しこの境界条件の取り扱いの理解を深めておこう。この粒子は常に面上にあるから、面に沿って、つまり面上の接線方向には自由に動くことができ、この最中 f の値は 0 で一定である。一方、法線方向には決して動けない。もし法線方向に少しでも動くと、上の球面での例と同じように $f \neq 0$ となるからである。

面 $f = 0$ 上を移動する粒子のもっている量 f が常に一定であることは、数式では

$$\frac{Df}{Dt}(x, y, z, t) = 0 \text{ on } f(x, y, z, t) = 0 \quad (3.80)$$

のように物質微分（ラグランジュ微分とよばれることもある）を用いて表現される。式の意味を今一度説明すると、「粒子は $f = 0$ を満たしながら移動し、この移動の最中に f の値は 0 で一定である」ということである。この粒子が流速ベクトル $\mathbf{v} \equiv (u, v, w)$ に流されるとすると物質微分は、

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (3.81)$$

と書けるから、運動学的条件は、

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = 0 \text{ on } f(x, y, z, t) = 0, \quad (3.82)$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot |\nabla f| \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = 0 \text{ on } f(x, y, z, t) = 0, \quad (3.83)$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial t} + |\nabla f| \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } f(x, y, z, t) = 0, \text{ where } \mathbf{n} \equiv \frac{\nabla f}{|\nabla f|}, \quad (3.84)$$

$$\therefore \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{|\nabla f|} \text{ on } f(x, y, z, t) = 0. \quad (3.85)$$

$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ は流速ベクトルの法線ベクトル方向への正射影である。

3.3.2 エネルギーの保存

(3.45) では、単位体積当たりのエネルギー（エネルギー密度）を V 内で体積積分するという方針でエネルギーを見積もった。エネルギー密度を e と書くことにすると、

$$e \equiv \frac{\rho}{2} |\nabla \phi|^2 + \rho g z \quad (3.86)$$

と定義される。 V 内にあるエネルギー E の時間変化率を計算してみよう。 E の時間微分は輸送定理を適用すると、

$$\frac{dE}{dt} = \int_V \frac{\partial e}{\partial t} dV + \int_S e v_n dS \quad (3.87)$$

と表される。ここで、 S は立体 V の表面を表す。 v_n は表面 S 上の微小な面要素 dS の運動速度ベクトルの外向き法線成分（normal component）である。Bernoulli の定理 (3.2) を用いるとエネルギー密度 e は、

$$e = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - (p - p_0) \quad (3.88)$$

と書ける。(3.2) において任意関数として定義していた $f(t)$ を $f(t) = \frac{p_0}{\rho}$ とおいた。(3.86) と (3.88) とを用いると

$$\frac{dE}{dt} = \rho \int_V \left(\nabla \phi \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) dV - \int_S \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + p - p_0 \right) v_n dS \quad (3.89)$$

と書き換えられる。ここで、速度ポテンシャルが満たす Laplace 方程式 (3.1) および、グリーンの公式^{*11}を用いると、エネルギーの時間変化率は、

$$\frac{dE}{dt} = \int_S \left\{ \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} - v_n \right) - (p - p_0) v_n \right\} dS \quad (3.91)$$

の様に面積積分のみで表示することができる。

ここで、 n を含む偏微分記号は

$$\frac{\partial}{\partial n} \equiv \mathbf{n} \cdot \nabla \quad (3.92)$$

と定義される。単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ と勾配ベクトル ∇ との内積である。幾何学的には ∇ を $\mathbf{n}$ を含む平面状へ正射影したものである。

^{*11} グリーンの公式： ψ と ϕ を微分可能な関数とすると一般に次の関係式が成り立つ。

$$\int_V (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) dV = \int_S \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS \quad (3.90)$$

これまでは立体 V を流体に満たされた漠然とした空間として扱ってきた。ここからは、立体 V は自由表面、海底面等をもつ海洋の一部として扱う。そのために、表面 S 上で満たされる境界条件を定める。立体 V を直方体と仮定すると境界 S は自由表面、海底面、 x 軸に平行な側面 (S_{z-} と S_{z+} の2つ)、 x 軸に垂直な側面 (S_{x-} と S_{x+} の2つ) の6つの面から成り、面積積分はこれら6つの面上で行われる。このことを数式で次のように表す。

$$S = S_F + S_B + S_{z-} + S_{z+} + S_{x-} + S_{x+}$$

$$\int_S dS = \int_{S_F} dS + \int_{S_B} dS + \int_{S_{z-}} dS + \int_{S_{z+}} dS + \int_{S_{x-}} dS + \int_{S_{x+}} dS \quad (3.93)$$

これらのそれぞれの面で満たされる境界条件を下表にまとめる。

	自由表面 S_F	海底面 S_B	側面 S_{z-} 、 S_{z+}	側面 S_{x-} 、 S_{x+}
運動学的境界条件	$\frac{\partial \phi}{\partial n} - v_n = 0$, (3.9)	$\frac{\partial \phi}{\partial n} - 0 = 0$, (3.3)	$\frac{\partial \phi}{\partial n} - 0 = 0$	$v_n = 0$
力学的境界条件	$p - p_0 = 0$, (3.6)	-	-	-

これらの境界条件を (3.93) に適用すると、(3.91) は垂直面 S_{x-} 、 S_{x+} 上の積分だけがゼロでない寄与をすることが確認される。 S_{x-} と S_{x+} とを併せて S_x と書くことにすると、

$$\frac{dE}{dt} = \rho \int_{S_x} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \quad (3.94)$$

である。(3.88) を用いると、

$$\frac{dE}{dt} = - \int_{S_x} e v_n dS - \rho \int_{S_x} (p - p_0) v_n dS \quad (3.95)$$

となる。右辺第1項は単位時間に V 内へ流入するエネルギー量（法線ベクトルは外向きを正と定義されていることに注意）、第2項は V の表面 S 上になされる仕事率を表している。この考察より、(3.95) はエネルギー保存則を表している。

3.3.3 エネルギーの輸送

次にエネルギーの輸送について調べる。 x 軸に垂直な面を $x = x$ と $x = x + \delta x$ ($\delta x \ll x$) に設定し、それぞれ $S_x(x)$ 、 $S_x(x + \delta x)$ と書くことにする。この2つの面に挟まれた微小な領域（薄板）の体積を δV とする。 δV 内のエネルギー変化率を見積もってみる。(3.94) 式を用いて計算を進めていく。面積積分 $\rho \int_{S_x(x)} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS$ 、 $\rho \int_{S_x(x+\delta x)} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS$ はともに領域の内側から外側への向きを正（法線ベクトルの正の向きを外向きとしているため）としていることに注意すると、 δV 内の単位時

間当たりのエネルギー収支（正味の出入り勘定）は、

$$\begin{aligned}
 \frac{dE}{dt}\delta x &= \rho \left\{ \int_{S_x(x+\delta x)} - \int_{S_x(x)} \right\} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} dS \delta x \\
 &= \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_{S_x(x)} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} dS \delta x \\
 \therefore \frac{dE}{dt} &= \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_{S_x(x)} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} dS
 \end{aligned} \tag{3.96}$$

となる。

結論からいうと、この式は波によるエネルギーの輸送を表現している。しかし、(3.96) の形のままだではそれが見えにくいため変形を試みる。非常に短い時間 δt の間における δV 内におけるエネルギー変化量は $\frac{dE}{dt}$ を時間積分することで得られるから、

$$\begin{aligned}
 \frac{dE}{dt}\delta t &= \rho \int_0^{\delta t} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} dy \right) dt \\
 &= \rho \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{Ac}{\sinh(kh)} \right)^2 (-k\omega) \int_0^{\delta t} dt \int_{-h}^0 \cosh^2 \{k(z+h)\} \sin^2(kx - \omega t) dy \right\} \\
 &= -\rho \frac{\partial}{\partial x} \left[\left\{ \frac{A^2 c}{\sinh^2(kh)} \right\} gk \tanh(kh) \left\{ \frac{h}{2} + \frac{1}{4k} \sinh(2kh) \right\} \right] \frac{\delta}{2} \\
 &= -\delta t \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \rho g A^2 c \left\{ \frac{1}{2} + \frac{kh}{\sinh(2kh)} \right\} \right]
 \end{aligned} \tag{3.97}$$

と計算される。ここで、(3.36)、(3.54) を用いると

$$\begin{aligned}
 \frac{dE}{dt}\delta t &= -\delta t \frac{\partial}{\partial x} (c_g E) \\
 \therefore \frac{dE}{dt} + \frac{\partial}{\partial x} (c_g E) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.98}$$

が導出される。これは波のエネルギー E が群速度 c_g で輸送される（移流する）ことを表している。別の言い方をすると、単位幅（ y 軸方向の単位長さ当たり）に単位時間当たり $c_g E \equiv F$ の大きさのエネルギーの流れ（これを流束、フラックス、flux とよぶこともある）があるという意味である。このエネルギーフラックスが単位時間当たりの量ということがここでは大事な点であり、これが波のもつパワーに他ならず波力発電では重要な意味をもってくる量である。

波力発電で吸収される波というのはすべて短波である。短波近似を施したエネルギーフラックス F は、下記のように書ける。

$$F = c_g E = \frac{gT}{4\pi} \times \frac{1}{2} \rho g A^2 = \frac{\rho g^2 A^2 T}{8\pi}. \tag{3.99}$$

この式に波の振幅 A 、波の周期 T を代入すれば F の値を見積もれる。この方法を用いて、ある海域から引き出しうる波パワー（賦存量という）が見積もられてきた。

3.3.4 不規則波

規則波の波パワーに関する理論を基礎として、不規則波の波パワーへと歩を進めよう。ある程度
の水深がれば短波近似は高い精度で成り立つから、(3.99) を拡張していく、規則波の理論を不規則
波の理論へと拡張する際の手段となるのは「重ね合わせ」である。何を重ね合わせるのか？それは
規則波（重ね合わせられるものという意味を強調するときには素成波と表現する）である。規則波
理論では単一の周波数のみを考えた。不規則波理論ではで無数の規則波（素成波）を考慮していく。
それに対応して無数の周波数を理論へ取り込む。(3.99) に含まれる量のうち素成波ごとに異なる
ものは振幅 A と周期 T であるから、これらを周波数の関数とみることを表現するために、以降は
 $A = A(\omega)$ 、 $T = T(\omega)$ と書く。

振幅 $A(\omega)$ の周波数依存性については、(2.17) により、パワースペクトルが既知であれば獲得する
ことができる。それを改めて

$$A(\omega) = \sqrt{S(\omega)d\omega} \quad (3.100)$$

と書く^{*12}。

周期 $T(\omega)$ の周波数依存性については、

$$T(\omega) = \frac{2\pi}{\omega} \quad (3.101)$$

と表される（依存性というより周期の定義というべきかもしれない）。

以上を踏まえて、素成波の波パワーを周波数空間において重ね合わせる（周波数に関して積分す
る）ことで不規則波の波パワーが得られるはずである。周波数 ω の素成波がもつ波パワーは

$$\frac{\rho g^2 A(\omega)^2 T(\omega)}{8\pi} = \frac{\rho g^2}{8\pi} \frac{2\pi}{\omega} S(\omega) d\omega \equiv f(\omega) d\omega \quad (3.102)$$

である。

基本的には、この式を周波数で積分すればよい。しかし、ここまでの説明では海洋波の性質のう
ち考慮していなかったものがある。それは波の伝搬方向である。

^{*12} $|X(\omega)|$ に周波数の次元をもつ $d\omega$ を乗じて「長さ」の次元をもつ量となる。

海洋波の方向にも分布がある

海洋波のスペクトルは周波数だけではなく、波が伝わる方向（水平2次元平面内での伝搬方向）にも依存することが知られている。このことを意識するために「波頂（はちょう）」という概念を知っておこう。英語では wave crest である。これは長さの次元をもつ量であり、波の幅を表す。幅とは、伝搬方向に直角な方向の波の規模を意味する。「波頂」は「波長（wave length）」と混同しやすい。読みは同じで、長さを表す点も共通しているからである。教科書や論文を読むとき注意が必要である。

波長に「短波長」、「長波長」という分類があるように波頂にも「短波頂（short crest）」、「長波頂（long crest）」という分類がある。波の性質を評価しようとしている、ある地点の空間スケール（例えば、波力発電機1機であれば $10^0 \sim 10^1 \text{m}$ のオーダーの長さ）に対して、波の幅が十分に短い場合に短波頂、逆に十分に長ければ長波頂という。波頂と伝搬方向分布とを大雑把に関連付けると、波頂が短いほど色々な方向から波がやってくるという分布であるのに対し、波頂が長くなるほど単一方向からやってくるという分布になる。

短波頂な波は色々な方向からやってはくるが、それらの方向を平均してみると、平均的な伝搬方向を定義することができる。各素成波の伝搬方向と、平均的な伝搬方向とのなす角の分布を考えることが多い。その角を χ と表す。過去の研究により、方向分布を数式で表すモデルとして、

$$G(\chi) = \frac{2}{\pi} \cos^2 \chi \quad (3.103)$$

が提案されている。方向分布関数を伝搬方向が取り得るすべての範囲 $(-\frac{\pi}{2} \leq \chi \leq \frac{\pi}{2})$ にわたって積分すると、

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} G(\chi) d\chi = 1 \quad (3.104)$$

となる。 $G(\chi)$ は規格化されており確率分布を表す関数としての性質を持っている。太洋のある場所に設置された $10^0 \sim 10^1 \text{m}$ 程度の長さスケールをもつ浮体に作用する波パワーを評価する場合、しばしば、そのパワーに寄与する波の多くが短波頂であるという風に近似される。ただし、この近似は海岸付近に設置された構造物を考える場合にはあまりよい近似とはならない。海岸近傍では波の伝搬方向は単一性が強く、長波頂の性質が高まるためである。

上の囲み事項で扱った波頂という概念を取り入れ、波パワー評価式を拡張する。短波頂不規則波を想定すると (3.102) で定義した素成波の波パワーは ω と χ の二変数関数として

$$f(\omega, \chi) d\omega d\chi = \frac{\rho g^2}{8\pi} \frac{2\pi}{\omega} S(\omega) G(\chi) d\omega d\chi \quad (3.105)$$

と表される。この $f(\omega, \chi)$ を ω および χ に関して積分する。その積分を F とおくと、

$$\begin{aligned}
 F &\equiv \int_{\chi=-\frac{\pi}{2}}^{\chi=\frac{\pi}{2}} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} f(\omega, \chi) \\
 &= \int_{\chi=-\frac{\pi}{2}}^{\chi=\frac{\pi}{2}} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} \frac{\rho g^2}{8\pi} \frac{2\pi}{\omega} S(\omega) G(\chi) d\omega d\chi \\
 &= \int_{\chi=-\frac{\pi}{2}}^{\chi=\frac{\pi}{2}} \int_{\omega=0}^{\omega=\infty} \frac{\rho g^2}{8\pi} \frac{2\pi}{\omega} 2S(\omega) G(\chi) d\omega d\chi.
 \end{aligned} \tag{3.106}$$

ここで、パワースペクトル $S(\omega)$ が偶関数であることを用いた。

F の値を実際に求めてみよう。波のパワースペクトル $S(\omega)$ として Pierson-Moskowitz 型 (1.101) を採用する。(3.106) に $G(\chi)$ 、 $S(\omega)$ を代入すると次の様に見える。

$$F = \frac{\rho g^2}{8\pi} 4\pi \frac{2}{\pi} \frac{0.11}{2\pi} \bar{H}^2 \bar{T} \int_{\chi=-\frac{\pi}{2}}^{\chi=\frac{\pi}{2}} \cos^2 \chi d\chi \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} \left(\frac{\omega}{\bar{\omega}}\right)^{-5} \exp \left\{ -0.44 \left(\frac{\omega}{\bar{\omega}}\right)^{-4} \right\} d\omega, \tag{3.107}$$

ここで $\bar{\omega} \equiv \frac{2\pi}{\bar{T}}$ とおいた。ここからは計算である。丁寧に進めよう。

χ に関する積分は次の通り実行される。

$$\int_{\chi=-\frac{\pi}{2}}^{\chi=\frac{\pi}{2}} \cos^2 \chi d\chi = \int_{\chi=-\frac{\pi}{2}}^{\chi=\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\chi + 1}{2} d\chi = \frac{\pi}{2}. \tag{3.108}$$

ω に関する積分は次の通り実行される (多少の工夫が求められる)。 $t = \omega^{-4}$ とおくと、 $dt = -4\omega^{-5} d\omega$ であるから、

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{\infty} \omega^{-6} \exp(-\beta \omega^{-4}) d\omega, \text{ where } \beta \equiv 0.44 \bar{\omega}^4 \\
 &= \int_{\infty}^0 -\frac{1}{4} \exp(-\beta t) t^{\frac{1}{4}} dt = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \exp(-\beta t) t^{\frac{1}{4}} dt
 \end{aligned} \tag{3.109}$$

となり、上記の積分はガンマ関数の積分表示式と同じ形をしているから

$$\int_0^{\infty} \omega^{-6} \exp(-\beta \omega^{-4}) d\omega = \frac{1}{4} \frac{\Gamma(\frac{5}{4})}{\beta^{5/4}} \tag{3.110}$$

である。

演習問題 3-3.

[1] エネルギーフラックス F を、定数 C を用いて

$$F = C\overline{H}^2\overline{T}, \text{ where } \overline{H} \text{ [m] and } \overline{T} \text{ [s]} \quad (3.111)$$

と表したとき、 C の mks 単位系での値を計算せよ。

[2] 日本近海のいくつかの海域における有義波高と有義波周期を調査し、その値をそれぞれ $\overline{H}$ と $\overline{T}$ に代入することで波力のエネルギーフラックス（パワー）を計算せよ。その値を、公表されている典型的な発電所（水力、火力、風力、原子力等）の出力と同じ単位に換算し、波から引き出せるパワーを発電所出力との比較を通じて評価せよ。

第 4 章

試験水槽での波

本章のねらい：単純な形状を有する試験水槽での造波を題材として基礎的な理論をルールにしたがって展開することで、有用な情報を得る一連の作業を体得する。

4.1 ●鉛直 2 次元問題

最初に鉛直 2 次元問題に取り組んでみよう。波の幅方向に次元を考慮しない簡略化された問題を解くことで、欲しい情報（解）を求めていく過程を身に付けよう。

変数を速度ポテンシャル ϕ とすると支配方程式は流体の連続性を表現する、

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.1)$$

である。先の章で述べた様に、この式のみでは一般解（未知定数を含む解）しか求まらないため境界条件が必要である。この問題では、自由表面境界条件と海底境界条件を課す。線形化された自由表面境界条件は、

$$\eta + \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \text{ on } z = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0, \text{ on } z = 0. \quad (4.3)$$

と書かれる。

(4.2) と (4.3) とを連立すると次の条件式が得られる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0, \text{ on } z = 0. \quad (4.4)$$

海底境界条件は、

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \text{ on } z = -h. \quad (4.5)$$

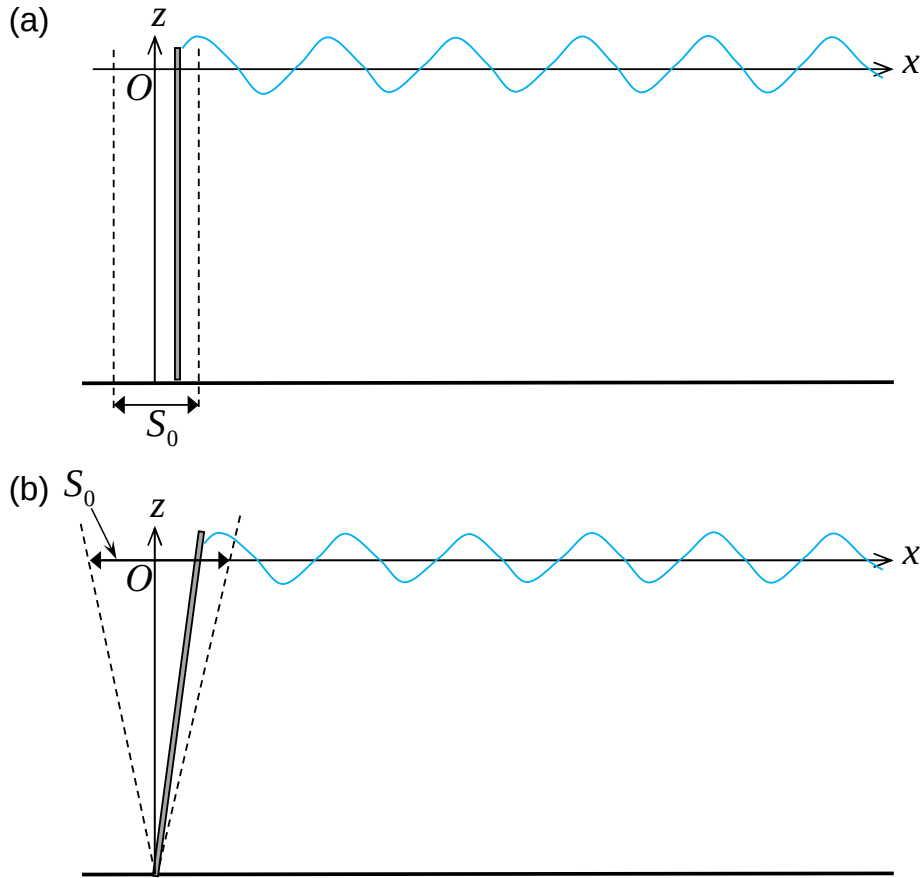


図 4.1 (a) ピストン型、(b) フラップ型。

と書かれる。

造波板表面の x 座標が（時間 t , 鉛直座標 z ）の関数として

$$\frac{1}{2}S(z) \sin \sigma t \quad (4.6)$$

と与えられるとすると、造波板表面（2次元なので「面」ではなく「線」だが）を表す方程式は、

$$F(x, z, t) = x - \frac{1}{2}S(z) \sin \sigma t = 0 \quad (4.7)$$

である。造波板の形状や運動モードには複数のものがあり、それに応じて鉛直座標の関数 $S(z)$ の形を定める。ここでは最も単純な2つの種類をアツかうことにしよう。造波板のストローク（ x 方向の運動幅）が微小であるという条件を課すために S_0 は微小と仮定する。

$$\text{ピストン型} : S(z) = S_0, \quad (4.8)$$

$$\text{フラップ型} : S(z) = S_0 \left(1 + \frac{z}{h}\right). \quad (4.9)$$

造波板表面において満たされる運動学的条件は、

$$u - \frac{1}{2}w \frac{dS(z)}{dz} \sin \sigma t = \frac{1}{2}S(z)\sigma \cos \sigma t \text{ on } x - \frac{1}{2}S(z) \sin \sigma t = 0 \quad (4.10)$$

である。

左辺第2項は微小量に関して2次であり他の項に比べて小さいとして無視すると、運動学的条件は

$$F\left(x = \frac{1}{2}S(z) \sin \sigma t, z, t\right) \equiv u - \frac{1}{2}S(z)\sigma \cos \sigma t = 0 \quad (4.11)$$

という風に近似できる。 S_0 が微小という条件を用いこの条件式をさらに簡略化してみよう。微小量を $\Delta x = \frac{1}{2}S(z) \sin \sigma t$ とし、(4.11) を $x = 0$ の周りでテイラー展開すると、

$$\begin{aligned} F\left(x = \frac{1}{2}S(z) \sin \sigma t, z, t\right) &= F(x = 0, z, t) \\ &+ \frac{\partial F}{\partial x}(x = 0, z, t) \left(\frac{1}{2}S(z) \sin \sigma t\right) + \dots \end{aligned} \quad (4.12)$$

である。右辺の展開第2項は、微小量に関して2次であるから無視すると線形化された運動学的条件

$$u(x = 0, z, t) = \frac{1}{2}S(z)\sigma \cos \sigma t \quad (4.13)$$

が得られる。

下ごしらえは以上である。解を求める作業を進める。変数分離法を用いてみよう。

$$\phi(x, z, t) = X(x)Z(z) \cos \sigma t. \quad (4.14)$$

ここで、造波の周波数と一致する周波数で振動することを仮定し時間因子の周波数を σ としている。空間構造関数 $X(x)$ 、 $Z(z)$ が満たす式を導くために (4.14) を (4.1) に代入すると次式を得る。

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0. \quad (4.15)$$

ここで、 k は、左辺第1項 (x のみの関数)、第2項 (z のみの関数) とが両方とも定数となる条件から導入された定数である。ただし、その値はこの時点では定まっていない。

空間構造関数 $X(x)$ 、 $Z(z)$ の一般解は表4.1の通りである。 $k = 0$ の成分は、空間に一様な流れを表しておりここでは考えないことにする。定数 k が実数か虚数か応じて、二つの異なる伝搬形態が出現し得る。その形態のことを「モード」という言葉で表現する。Progressive モード^{*1}と Evanescent

表 4.1 水波の各モード。

-	$k^2 > 0 (k : \text{実数})$	$k = 0$	$k^2 < 0 (k : \text{純虚数})$
$X(x)$	$A_p \cos kx + B_p \sin kx$	$Ax+B$	$A_e e^{ k x} + B_e e^{- k x}$
$Z(z)$	$C_p e^{kz} + D_p e^{-kz}$	$Cz+D$	$C_e \cos k z + D_e \sin k z$
モード名	Progressive (propagation)	-	Evanescent
性質	周期性をもって伝搬	-	造波地点近傍でのみ出現

モード*2とが存在し、一般解はこの2つのモードの解を重ね合わせで表現される。Evanescent モードの関数 $X(x)$ の $e^{|k|x}$ は、 $x \rightarrow \infty$ で無限大に発散し物理現象としては発現しないと考えられるため、 $A_e = 0$ とする。

海底境界条件 (4.5) を課すことで、

$$Z(z) \propto \cos \{|k|(h+z)\} \text{ and } \propto \cosh \{k(h+z)\} \quad (4.16)$$

であることが示せる。

演習問題 4-1.

(4.16) 式が成り立つことを証明せよ。

したがって速度ポテンシャルの一般解は、progressive モード、evanescent モードの波数をそれぞれ k_p 、 k_e とすると、

$$\begin{aligned} \phi(x, z, t) = & A_p \cosh \{k_p(h+z)\} \sin(k_p x - \sigma t) \\ & + C_e e^{-k_e x} \cos \{k_e(h+z)\} \cos \sigma t \end{aligned} \quad (4.17)$$

と書ける。

次に、この一般解に自由表面における境界条件 (4.4) を課すと、各モードに対してそれぞれ次に示す分散関係が導かれる。

$$\text{Progressive mode : } \sigma^2 = g k_p \tanh(k_p h), \quad (4.18)$$

$$\text{Evanescent mode : } \sigma^2 = -g k_e \tan(k_e h). \quad (4.19)$$

上記の分散関係を満足する波数 k_p 、 k_e の値を定めるには一般的には数値計算を必要とする。無次元

*1 前進モード、伝搬モードと理解して差し支えない。

*2 減衰モード、消失モードと訳してもいいのかもしれない。

変数を $x = k_p h$ 、 $x = k_e h$ のように定義し、分散関係を

$$\text{Progressive mode : } \frac{\sigma^2 h}{g} \frac{1}{x} - \tanh(x) = 0, \quad (4.20)$$

$$\text{Evanescent mode : } \frac{\sigma^2 h}{g} \frac{1}{x} + \tan(x) = 0. \quad (4.21)$$

の様に書き換えたうえで、左辺を x の関数とみて、左辺の値が 0 に近くなる x を近似的に決める。Newton 法 (Newton-Raphson 法) が有効である。

上で「一般的には数値計算を必要とする」と記したが、それを使わなくても根を求める方法がある。Progressive モードの分散関係では、 $\tanh(x)$ を有理関数で近似 (Padé 近似) することによって x に関する簡易な代数方程式の根を求める、という形に持ち込める。 $\tanh(x)$ の Padé 近似のひとつ $[2, 2](x)$ は、

$$\tanh(x) \simeq [2, 2](x) = \quad (4.22)$$

である。これを (4.20) に代入すると、

$$= 0 \quad (4.23)$$

を得る。これを x に関して解き、次式の様に根を計算できる。

$$x = . \quad (4.24)$$

演習問題 4-2.

- (1) $\frac{\sigma^2 h}{g} = 1$ と仮定し、(4.20)、(4.21) をニュートン法で解くプログラムを作成し、根を計算せよ。
- (2) (1) で求めた progressive モードの結果と Padé 近似による根 (4.24) と比較のうえ考察せよ。
- (3) $\tanh(x)$ の Padé 近似式 (4.22) を導け。

Progressive モードと Evanescent モードの分散関係は一見すると類似しているが、実は全く異なる性質を有している。Progressive モードでは、双曲線の片側 (定義域がの側) と双曲線関数 $\tanh(x)$ との交点が解となる。 $\tanh(x)$ は狭義単調増加なため、その交点はただ一つである。対照的に、Evanescent mode では、同様の双曲線の片側と三角関数 $\tan(x)$ との交点が解となり、 $\tan(x)$ は周期性を有することから、解は無限個存在する (数値計算を行う際には有限個で打ち切る)。つまり Evanescent なモードは無限個存在する。これらをすべて重ね合わせて初めて完全な一般解とな

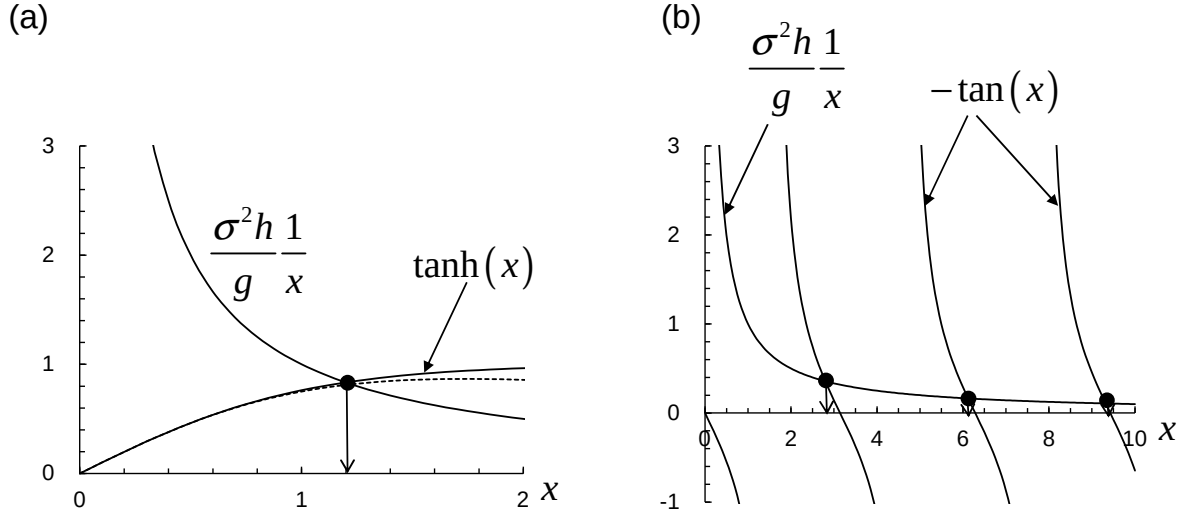


図 4.2 分散関係の根。(a)Progressive モード。破線は $\tanh(x)$ の Padé 近似 $[2, 2](x)$ 、(b)Evanescent モード。この図では $\frac{\sigma^2 h}{g} = 1$ と仮定して描いている。

る。この重ね合わせを考慮して一般解を次のように書こう。

$$\begin{aligned} \phi(x, z, t) = & A_p \cosh \{k_p(h+z)\} \sin(k_p x - \sigma t) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} C_e(n) e^{-k_e(n)x} \cos \{k_e(n)(h+z)\} \cos \sigma t. \end{aligned} \quad (4.25)$$

未知定数 A_p 、 $C_e(n)$ を定めるために、先に導出した造波板での運動学的境界条件を課す。式で表すと、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} S(z) \sigma \cos \sigma t = & \frac{\partial \phi}{\partial x}(x=0, z, t) = [A_p k_p \cosh \{k_p(h+z)\} \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} C_e(n) k_e(n) \cos \{k_e(n)(h+z)\}] \cos \sigma t \end{aligned} \quad (4.26)$$

である。これが任意の時刻で成り立つから、

$$\frac{1}{2} S(z) \sigma = A_p k_p \cosh \{k_p(h+z)\} - \sum_{n=1}^{\infty} C_e(n) k_e(n) \cos \{k_e(n)(h+z)\} \quad (4.27)$$

である。この式から A_p 、 $C_e(n)$ を定める。ここで必要となるのが次式が表現する直交関係である。

$$\int_{-h}^0 \cosh \{k_p(h+z)\} \cos \{k_e(n)(h+z)\} dz = 0, \quad (4.28)$$

$$\int_{-h}^0 \cos \{k_e(m)(h+z)\} \cos \{k_e(n)(h+z)\} dz = 0 \text{ if } m \neq n. \quad (4.29)$$

演習問題 4-3.

(4.28)、(4.29) を証明せよ。

(4.27) の両辺に $\cosh \{k_p(h+z)\}$ を掛けたうえで、両辺を $-h$ から 0 まで z で積分する。(4.28) により、

$$A_p = \frac{\int_{-h}^0 \frac{1}{2} S(z) \sigma \cosh \{k_p(h+z)\} dy}{k_p \int_{-h}^0 \cosh^2 \{k_p(h+z)\} dz} \quad (4.30)$$

の様に A_p を求めることができる。同様に、(4.27) の両辺に $\cos \{k_e(m)(h+z)\}$ を掛けたうえで、両辺を $-h$ から 0 まで z で積分し、(4.29) を適用すると、

$$C_e(m) = -\frac{\int_{-h}^0 \frac{1}{2} S(z) \sigma \cos \{k_e(m)(h+z)\} dy}{k_e(m) \int_{-h}^0 \cos^2 \{k_e(m)(h+z)\} dz} \quad (4.31)$$

と係数 $C_e(m)$ が定まる。

ピストン型の場合は (4.8) を用いると、

$$A_p = \frac{S_0 \sigma \sinh(k_p h)}{k_p \{ \sinh(k_p h) \cosh(k_p h) + k_p h \}}, \quad (4.32)$$

$$C_e(m) = -\frac{S_0 \sigma \sin(k_e h)}{k_e \{ \sin(2k_e h) + 2k_e h \}} \quad (4.33)$$

となる。

造波板がフラップ型の場合、(4.9) を用いて、

$$A_p = \frac{S_0 \sigma \{ k_p h \sinh(k_p h) + 1 - \cosh(k_p h) \}}{k_p^2 h \{ \sinh(k_p h) \cosh(k_p h) + k_p h \}}, \quad (4.34)$$

$$C_e(m) = -\frac{2S_0 \sigma \{ k_e h \sin(k_e h) + \cos(k_e h) - 1 \}}{k_e^2 h \{ \sin(2k_e h) + 2k_e h \}} \quad (4.35)$$

であることが示せる。

求まった係数を用いて、造波板から十分に離れた場所における、造波された波の振幅を計算してみる。造波板から離れた場所では Evanescent モードはほぼ 0 であるので、Progressive モードのみを考慮する。

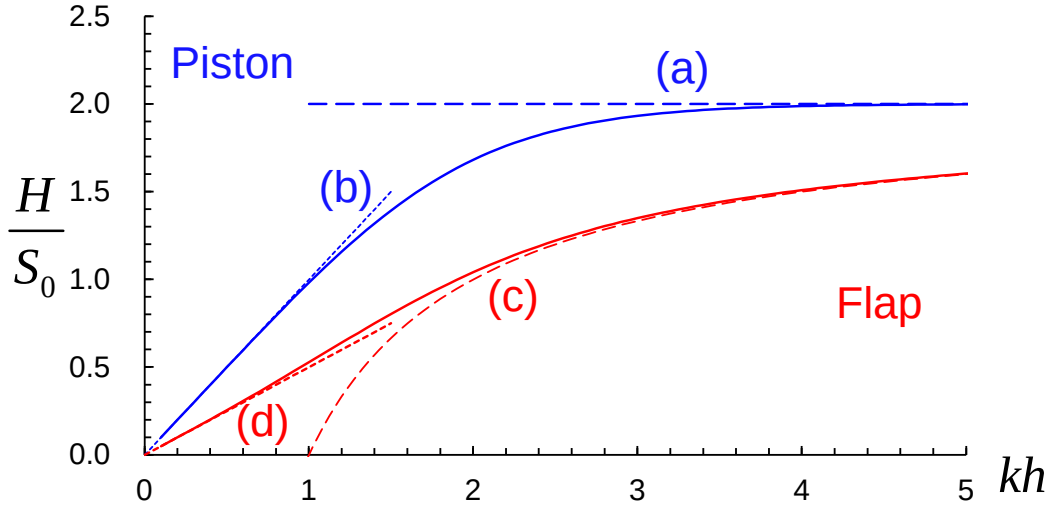


図 4.3 青い実線：ピストン型の波高比、(a) $x \rightarrow \infty$ における漸近近似、(b) $x \rightarrow 0$ における漸近近似。赤い実線：フラップ型の波高比、(c) $x \rightarrow \infty$ における漸近近似、(d) $x \rightarrow 0$ における漸近近似。

(4.2) を用いると速度ポテンシャルから波の変位振幅 $\bar{\eta}$ を計算できる。ピストン型の場合には、

$$\bar{\eta} = S_0 \frac{\cosh(2k_p h) - 1}{\sinh(2k_p h) + 2k_p h}. \quad (4.36)$$

また、フラップ型の場合には、

$$\bar{\eta} = S_0 \frac{2}{k_p h} \sinh(k_p h) \frac{k_p h \sinh(k_p h) + 1 - \cosh(k_p h)}{\sinh(2k_p h) + 2k_p h} \quad (4.37)$$

である。

波高 $H = 2\eta$ を造波板の最大ストロークで規格化した無次元関数 H/S_0 の性質を調べる。以下、 $x = kh$ と書くことにする。最初に $x = kh \rightarrow 0$ におけるふるまいに目を向ける。ピストン型の場合、

$$\frac{H}{S_0} \sim 2 \frac{1 + \frac{1}{2}(2x)^2 - 1}{2x + 2x} = x, \quad x \rightarrow 0 \quad (4.38)$$

であり、フラップ型では、

$$\frac{H}{S_0} \sim \frac{4}{x} \frac{x^2 + 1 - (1 + \frac{1}{2}x^2)}{2x + 2x} = \frac{1}{2}x, \quad x \rightarrow 0 \quad (4.39)$$

となる。 k が微小な（長波長）領域においては、 kh の増加に対して波高はほぼ線形に増加し、ピストン型のその増加度合いは、フラップ型のその 2 倍であると把握できる。

次に $x = kh \rightarrow \infty$ におけるふるまいを解析する。ピストン型、フラップ型それぞれ

$$\frac{H}{S_0} \sim 2 \frac{\cosh(2x)}{\sinh(2x)} = \frac{2}{\tanh(2x)} \sim 2, \quad x \rightarrow \infty, \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{H}{S_0} &\sim \frac{4}{x} \sinh(x) \frac{x \sinh(x) - \cosh(x)}{\sinh(2x)} \sim 2 \frac{x \cosh(2x) - \sinh(2x)}{x \sinh(2x)} \\ &= 2 \left\{ \frac{1}{\tanh(2x)} - \frac{1}{x} \right\} \sim 2 \left(1 - \frac{1}{x} \right), \quad x \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.41)$$

という直線あるいは曲線に漸近する。

続いて、前章で導いた式 (3.98) を用いて、造波された波によるエネルギー輸送量 $F = c_g E$ (エネルギーフラックス) を評価してみよう。 F を $\rho g S_0^2 h \sigma$ で割ることで無次元化した量を F^* と表すと、

$$\begin{aligned} F^* &= \frac{1}{8} \rho g H^2 \frac{\sigma}{k} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right) \frac{1}{\rho g S_0^2 h \sigma} \\ &= \frac{1}{16} \frac{1}{kh} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right) \left(\frac{H}{S_0} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.42)$$

ピストン型のエネルギー輸送量は、(4.36) を用いると

$$F^* = \frac{1}{4} \frac{1}{x \sinh(2x)} \frac{\{\cosh(2x) - 1\}^2}{\{\sinh(2x) + 2x\}} \quad (4.43)$$

と求まる。波高の式と同様に $x \rightarrow 0$ における F^* のふるまいを調べる。

$$F^* \sim \frac{1}{4} \frac{1}{2x^2} \frac{4x^4}{2x + 2x} = \frac{1}{8} x \quad (4.44)$$

となり、 $x = kh$ の増加に対して、ほぼ線形で変化する。

また、(4.37) を用いるとフラップ型のエネルギー輸送量は、

$$F^* = \frac{1}{x^3 \sinh(2x)} \frac{\sinh^2 x (x \sinh x + 1 - \cosh x)^2}{\sinh 2x + 2x} \quad (4.45)$$

であり、 $x \rightarrow 0$ においては、

$$F^* \sim \frac{1}{2x^4} \frac{x^2 \left(\frac{1}{2} x^2 \right)^2}{2x + 2x} = \frac{1}{32} x \quad (4.46)$$

に漸近する。よって、 $x = kh$ の増加に対する線形での変化はピストン型と共通するが、その増加の度合いはピストン型の $1/4$ である。

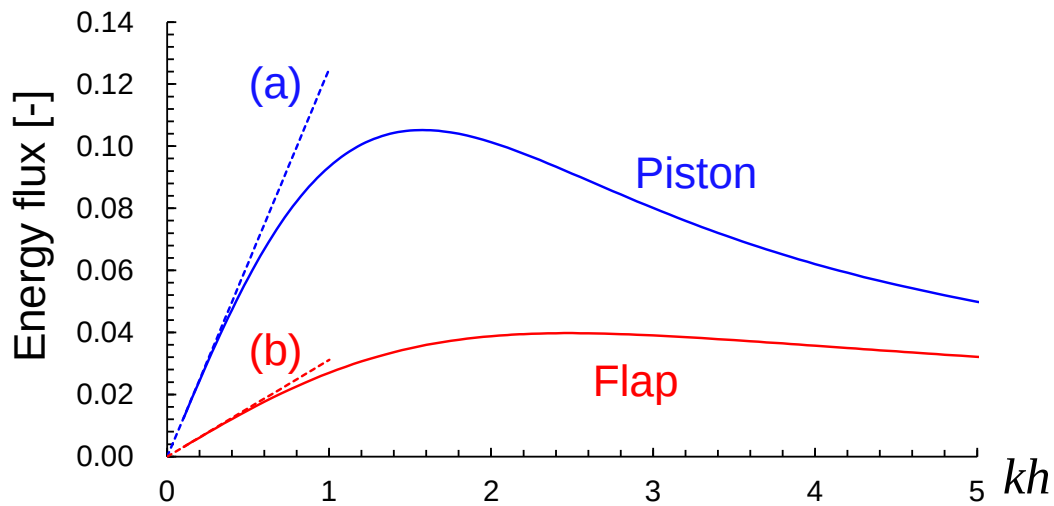


図 4.4 青い実線：ピストン型のエネルギー輸送量、(a) $x \rightarrow 0$ における漸近近似。赤い実線：フラップ型のエネルギー輸送量、(b) $x \rightarrow 0$ における漸近近似。

演習問題 4-4.

【非必須】：ピストン型およびフラップ型のエネルギー輸送量が最大となる kh の値を数値計算によって求めよ。

演習問題 4-5.

本節では造波板が運動する周期を規則的、すなわち角周波数が σ で一定と仮定した。一方、ここでは造波板運動が不規則な場合を考えてみる。前章で学修した「規則波から不規則波への移行」を応用しつつ、本節の理論を拡張することで不規則造波の理論を作るという方針を採ってみよう。造波板運動のパワースペクトルが与えられているものとするとき、造波される波のエネルギー輸送量のパワースペクトルを計算する理論式を導け。

4.1.1 エネルギー保存則

前節で造波された波が輸送するエネルギーを計算した。このエネルギーの源は造波板が流体に対してなした仕事である。流体と壁との摩擦、熱の形での消散などの過程は方程式に組み込んでいないため、理論が正しいければ、すなわちエネルギー保存則が成立しているならば、造波板がなす仕事率は前節に計算した波伝搬にともなうエネルギー輸送量に一致すると推察できる。このことを確かめてみよう。この考察により、知識の一般化の練習になる。この講義であつかっている水波の伝搬という現象においても、高校の時以来習ってきた物理の力学体系の根幹をなす基本法則が成り立つこ

とを実感できるはずである。物理現象を起こす物体が質点（小球？）・水・船・宇宙船などと変わっても基本法則は一貫して成り立ち、個々の物体に対して考えてきた解が実は共通の基盤（基本法則）のうえに立っているものであることを認識できればしめたものである。断片的な複数の知識を一段昇華させて一般化された知識として頭に定着させ（ようとし）てみよう。

線形化されたベルヌーイの定理^{*3}を用いると造波板位置^{*4}における圧力は下記のように与えられる。

$$p(x=0, z, t) = p_0 - \rho g z + \rho A_p \sigma \cosh \{k_p(h+z)\} - \sigma \rho \sum_{n=1}^{\infty} C_e(n) \cos \{k_e(n)(h+z)\} \sin \sigma t. \quad (4.47)$$

上式の右辺第4項は Evanescent モードの波の伝搬による圧力変動である。これは波エネルギーの輸送にはほとんど寄与しないと考えて無視する。また、第1および第2項は時間変動成分をもたない静水圧であり、この圧力による仕事は海底（ $z = -h$ ）から静水面（ $z = 0$ ）までの水柱がもつ位置エネルギー（一定値）をもたらすだけで時間変動をともなうエネルギー輸送には寄与しない。以上より以下では、第3項の Progressive モードの伝搬にともなう変動圧力のみを考慮する。以下、添え字の p は省略する。

ピストン型

最初にピストン型を扱う。圧力（水圧）は造波板に作用することで造波板に負荷を与え、またその反作用として造波板は流体に仕事をなす。力学でいう仕事は、力の大きさと、力を受けた物体がその力の向きに移動した距離によって決まる。水のような流体が物体に与える力は、物体表面上の微小面積のもつ法線方向正射影と、そこにかかっている圧力との積を全表面にわたって総和をとる（積分する）ことで求められる。つまり圧力の面積積分を行う。この結果として求められる力を流体力（Hydrodynamic force）という。なお、鉛直2次元問題では表面積分は実際には線積分になり計算量が少ないため練習には最適である（あくまで面積積分としてとらえたければ y 方向（紙面を貫く向き）にも積分することをイメージすればよい）。

$$\rho A \sigma \cos(\sigma t) \int_{-z}^0 \cosh \{k(h+z)\} dz = \rho A \sigma \frac{\sinh(kh)}{k} \cos(\sigma t). \quad (4.48)$$

この力にピストン型造波板によって動かされる水の速度を乗ずることで仕事率（パワー）が計算される。その速度は線形化された運動学的境界条件

$$u(x=0, z, t) = \frac{1}{2} S_0 \sigma \cos \sigma t \quad (4.49)$$

^{*3} $\frac{1}{2} \rho |\nabla \phi|^2$ は微小量 ϕ の二次の量であるから無視する

^{*4} 線形化された運動学的境界条件では造波板位置は常に $x = 0$ にあると近似できる。

により右辺の造波板運動速度に等しい。よって仕事率は、

$$\frac{1}{2} \rho A \sigma^2 S_0 \frac{\sinh(kh)}{k} \cos^2(\sigma t) \quad (4.50)$$

であり、1周期平均をとる^{*5} と、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \rho A \sigma^2 S_0 \frac{\sinh(kh)}{k} \\ &= \frac{1}{4} \rho \sigma^3 S_0^2 \frac{\sinh^2(kh)}{k^2 \{\sinh(kh) \cosh(kh) + kh\}} \end{aligned} \quad (4.52)$$

である。先述の波の輸送エネルギー量を計算したときと同じ方法で無次元化すると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \frac{\sigma^2}{gk} \frac{\sinh^2(kh)}{kh \{\sinh(kh) \cosh(kh) + kh\}} \\ &= \frac{1}{4} \tanh(kh) \frac{1}{kh} \frac{\sinh^2(kh)}{\{\sinh(kh) \cosh(kh) + kh\}} \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{kh} \frac{\{\cosh(2kh) - 1\}^2}{\sinh(2kh) \{\sinh(2kh) + 2kh\}} \end{aligned} \quad (4.53)$$

となる。これは (4.43) と一致する。

フラップ型

この型は回転運動をするため、造波板の運動速度は z に依存する。造波板の微小部分（長さ dz ）が流体にもたらす仕事率を求めてから積分という順序で計算する。微小部分による仕事率は、

$$\frac{1}{2} \rho A \sigma^2 \cosh \{k(h+z)\} S_0 \left(1 + \frac{z}{h}\right) \cos^2(\sigma t) dz \quad (4.54)$$

である。1周期平均をとり、さらに z で積分すると、

$$\frac{1}{4} \rho S_0 A \sigma^2 \frac{1}{k^2 h} \{kh \sinh(kh) - \cosh(kh) + 1\} \quad (4.55)$$

を得る。ピストン型と同様に無次元化すると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \frac{\sigma^2}{gk} \frac{1}{(kh)^3} \frac{\{kh \sinh(kh) - \cosh(kh) + 1\}^2}{\{\sinh(kh) \cosh(kh) + kh\}} \\ &= \frac{\sinh^2(kh)}{\sinh(2kh)} \frac{1}{(kh)^3} \frac{\{kh \sinh(kh) - \cosh(kh) + 1\}^2}{\{\sinh(kh) \cosh(kh) + kh\}} \end{aligned} \quad (4.56)$$

*5

$$\frac{1}{2\pi/\sigma} \int_0^{2\pi/\sigma} \cos^2(\sigma t) dt = \frac{1}{2} \quad (4.51)$$

であり、(4.45) と一致する。

以上で、下記の関係が厳密に成り立っていることが確認された。

$$(\text{造波板が流体になす仕事率}) = (\text{波により遠方へ輸送されるエネルギー}).$$

ここで行ったパワーの計算には、本節冒頭に記した目的とは別にもうひとつ目的がある。次節にて造波板を波力発電機に見立てた理論をあつかう。その理論では波から取り出せるパワーを計算することが重要である。その計算には本節でおこなったパワーの計算と共通する部分があるため、後節に先立って計算に慣れておくためである。

4.1.2 Evanescent モードのゆくえ

先の節にて Progressive モードのみを取り上げ、そのエネルギー輸送を考えた。その際、 x 軸方向に伝搬しないとの理由で無視された evanescent モードのことをここでは取り上げる。伝搬しないというものの、evanescent モードは progressive モードとともに造波板で発生はしているから、無視したままにしておく、その発生に費やされたエネルギーの消失を思わせ、エネルギー保存則が破られているように感じられる。progressive モードと比べ目立たず応用性も乏しいと思われるが、上記の疑問を解消するために、この講義では evanescent モードの分散関係、エネルギーフラックスなどを一通り導出し、さらにそのエネルギー収支を考えてみることにする。

分散関係は次の通りである。

$$\sqrt{\frac{h}{g}}\omega = \sqrt{-kh \tan(kh)}. \quad (4.57)$$

右辺が実数となるためには、 $\tan(kh) < 0$ であることが必要であるから、このモードでは波数の取り得る値の範囲が限定される。その範囲は

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi < kh < n\pi, \text{ where } n = 1, 2, \dots \quad (4.58)$$

である。 n は Evanescent モードのモード番号である。Progressive モードと異なり、グラフが右下がりとなる。このことは位相速度と群速度との伝搬方向が逆になることを示唆する。

(4.57) 式を用いて位相速度と波数との関係を導くと、

$$\frac{(\omega/k)}{\sqrt{gh}} = \sqrt{-\frac{\tan(kh)}{kh}} \quad (4.59)$$

を得る。この関係を図示したものが図 4.6 である。

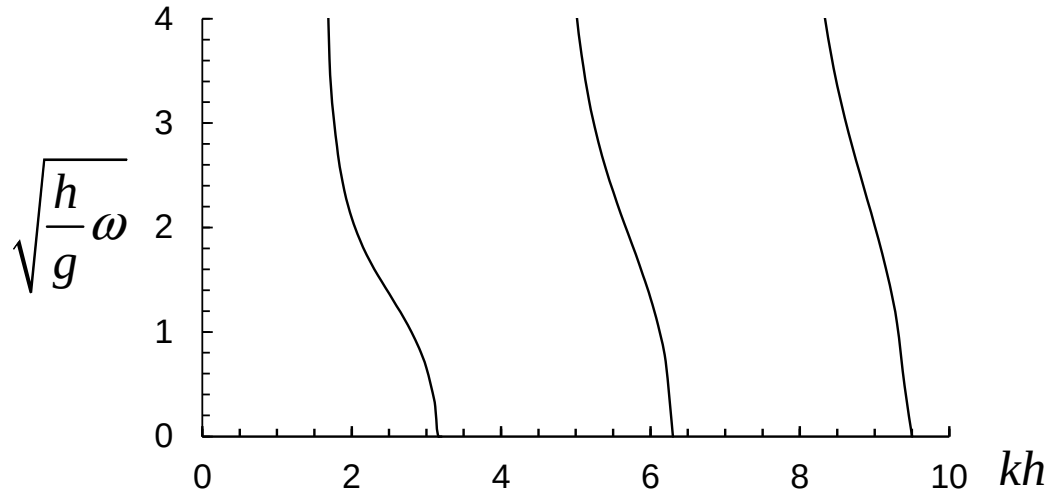


図 4.5 分散関係。

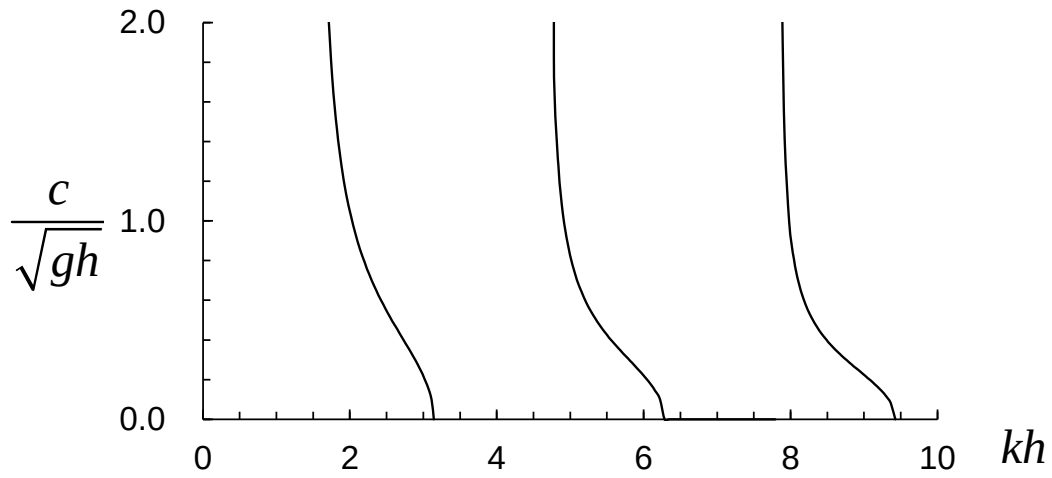


図 4.6 位相速度。

群速度 c_g と位相速度 c との比は、

$$\frac{c_g}{c} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{kh}{\sin(kh) \cos(kh)} \right) \quad (4.60)$$

である。 kh とこの比との関係を図 4.7 に示す。負の値となるのは、群速度の伝搬が位相速度と逆向きとなるからである。

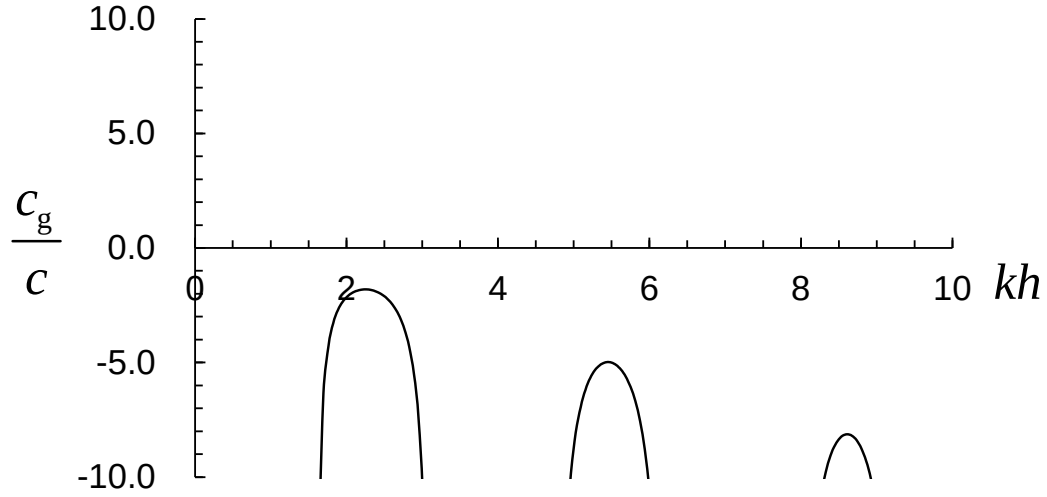
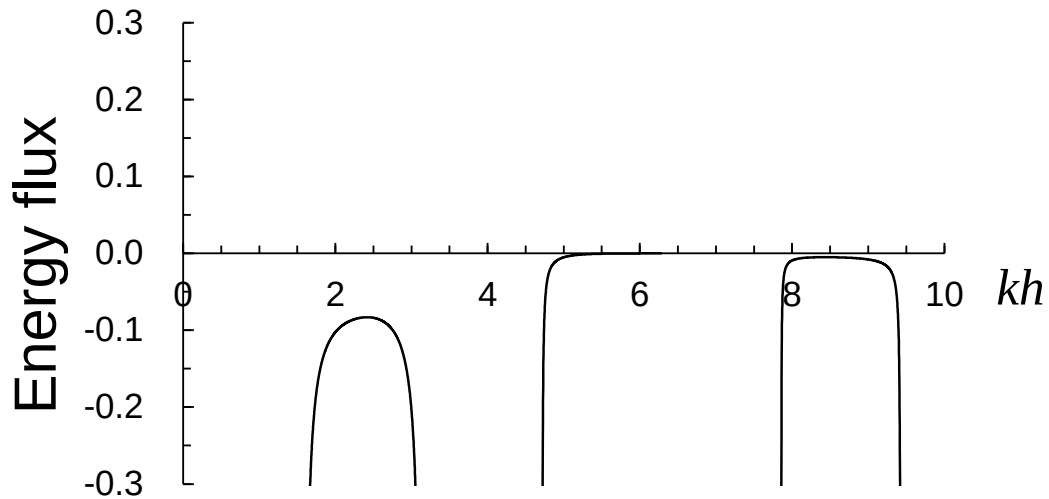


図 4.7 群速度の位相速度に対する比。

エネルギーフラックスの振幅を無次元化した量は次の様子的に書き表される。 x 方向には e-folding scale $= \frac{1}{2k}$ で減衰するから、このフラックスは $x = 0$ (造波板位置) の近傍でしか存在しない。

$$P^* = \frac{1}{4} \frac{1}{kh \sin(2kh)} \frac{\{1 - \cos(kh)\}^2}{\sin(2kh) + 2kh} e^{-2kx}. \quad (4.61)$$

図 4.8 $x = 0$ におけるエネルギーフラックスの振幅 P^* と kh との関係。

ここから、エネルギー収支を勘定する。表 4.1 を再度見直してみると、Evanescent モードの z 方向依存性は、 $\cos k(h + z)$ で与えられることが分かる。このことは本モードが z 方向には evanescent ではないことを意味する。このことを確かめるために $z' = z + h$ とおき、積和公式によ

り $\cos k(h+z) \cos \omega t$ を次のように書き換えてみる。

$$\cos k(h+z) \cos \omega t = \frac{1}{2} \left\{ \underbrace{\cos(kz' + \omega t)}_{-z \text{ 方向}} + \underbrace{\cos(kz' - \omega t)}_{+z \text{ 方向}} \right\}. \quad (4.62)$$

上式は、evanescent モードによるエネルギー輸送は鉛直正方向および負方向の双方向性を有することを意味する。この両者のエネルギー輸送量の振幅は (4.61) で共通であるから、双方向のエネルギー輸送は互いに打ち消し合い正味の輸送量は 0 となる。

流体にエネルギーを供給する造波板の運動がなす仕事は上記の結果を支持するだろうか？ Progressive モードのエネルギー収支勘定と同じように、造波板の仕事率は、

$$\rho \omega \sum_{n=1}^{\infty} C_e(n) \frac{\sin(kh)}{k} \sin \omega t \cdot \frac{1}{2} S_0 \omega \cos \sigma t \quad (4.63)$$

であり、この関数は時間に $\sin(\omega t) \cos(\omega t) = \frac{1}{2} \sin(2\omega t)$ の形で依存する。この因子の時間平均を取ると 0 になる。よって、造波板に作用する流体力のうち Evanescent モードの変動圧力成分の寄与分の反作用は、流体に対して正味仕事をしない。仕事率の時間平均値は 0 である。

以上より evanescent モードについてもエネルギー収支が成り立つことが示され、同時に “evanescent” という言葉をより厳密に意味付けられるようになった。すなわち、水平方向には伝搬できないが、鉛直方向には伝搬できるのであるから、先の節で定義した evanescent モードは、「水平方向には evanescent であり、かつ鉛直方向には、正味のエネルギー輸送を伴わない progressive なモード」と言い換えられる。

4.1.3 着力点

ある構造物の表面上のある微小領域に外力が働いているものとする。この外力の作用線が回転中心を通らないならば（外力のてこの長さが 0 でないならば）、外力モーメントが作用し、この構造物の角速度は変化する。このような外力が構造物表面上のあらゆる点に作用する結果として生じる（総）外力モーメントは、微小領域に作用する外力モーメントを積分することで計算される。

表面上微小領域に作用する各外力ベクトルは、それらの総和としての合力を決定する。この合力にはひとつの着力点があり、この点を通る合力の作用線と回転中心との距離が合力によるモーメントの大小を決める大事な量となる（応用例：浮体の安定性、船舶の操縦性の評価）。

この章では、回転する物体の例としてフラップ型造波板を取り上げている。この板の表面にも流体力が作用する。ここではその流体力の着力点の位置を特定してみよう。この講義で考えている波動伝搬という条件下では、圧力には静水圧成分と変動圧成分が有る。変動圧が静水圧に重畳すると着力点位置も変動するのだろうか？するとすればどの程度か？このような問題を設定し、その解を得るための作業を修得しよう。

流体力は次の様に計算される。

$$\begin{aligned} \int_{-h}^0 p(x=0, z, t) dz &= \frac{1}{2} \rho g h^2 + \rho A_p \omega \frac{\sinh(k_p h)}{k_p} \cos \omega t \\ &+ \rho \omega \sum_{n=1}^{\infty} C_e(n) \frac{\sin(k_e h)}{k_e} \sin \omega t. \end{aligned} \quad (4.64)$$

フラップ型造波板上の鉛直座標が z の点に作用する流体力モーメントのレバー（てこの長さ）は、回転中心が $z = -h$ に位置することに注意すると

$$z - (-h) = z + h \quad (4.65)$$

で与えられる*6から、流体力モーメントは、

$$\begin{aligned} &\int_{-h}^0 p(x=0, z, t) (z + h) dz \\ &= \int_{-h}^0 p(x=0, z, t) z dz + \int_{-h}^0 p(x=0, z, t) h dz \\ &= -\frac{1}{3} \rho g h^3 + \frac{1}{2} \rho g h^3 + \rho A_p \omega \left\{ \frac{1 - \cosh(k_p h)}{k_p^2} + \frac{h \sinh(k_p h)}{k_p} \right\} \cos \omega t \\ &\quad + \rho \omega \sum_{n=1}^{\infty} C_e(n) \left\{ \frac{\cos(k_e h) - 1}{k_e^2} + \frac{h \sin(k_e h)}{k_e} \right\} \sin \omega t \\ &= \frac{1}{6} \rho g h^3 + \rho \omega A_p \frac{1}{k_p^2} \{1 - \cosh(k_p h) + k_p h \sinh(k_p h)\} \cos \omega t \\ &\quad + \rho \omega \sum_{n=1}^{\infty} C_e(n) \frac{1}{k_e^2} \{\cos(k_e h) - 1 + k_e h \sin(k_e h)\} \sin \omega t \end{aligned} \quad (4.67)$$

という風になる。

今、仮に時間変化項を無視し静水圧由来の項のみを考慮した場合を考える。その場合の着力点の座標を z_s とすると、(4.64)、(4.67) から、

$$\frac{1}{2} \rho g h^2 (z_s + h) = \frac{1}{6} \rho g h^3 \quad (4.68)$$

$$\therefore (z_s + h) = \frac{1}{3} h$$

$$\therefore z_s = -\frac{2}{3} h \quad (4.69)$$

*6 ある時刻におけるフラップ型造波板の回転角度を θ とすると、てこの長さは厳密には、

$$\frac{z + h}{\cos \theta} \quad (4.66)$$

であるが、造波板運動が微小であるとの仮定の下では、 $\cos \theta \simeq 1$ と近似できる。

$\frac{S}{h}$ に関して Taylor 展開し、 $\frac{S}{h}$ の 1 次項のみを残すと次式を得る。

$$\begin{aligned}
 z_d &\simeq \left[1 + \{ (F_p - M_p) \cos \omega t + (F_e - M_e) \sin \omega t \} \frac{S}{h} \right] \frac{1}{3} h - h \\
 &= -\frac{2}{3} h + \frac{1}{3} \{ (F_p - M_p) \cos \omega t + (F_e - M_e) \sin \omega t \} S \\
 &= -\frac{2}{3} h + \frac{1}{3} S \sqrt{(F_p - M_p)^2 + (F_e - M_e)^2} \sin(\omega t + \phi), \\
 &\quad \text{where } \tan \phi \equiv \frac{F_p - M_p}{F_e - M_e}.
 \end{aligned} \tag{4.74}$$

したがって、変動圧力を加味すると着力点位置は、静力学により決まる着力点を中心として、 S に比例する振幅、造波板運動と同じ周波数 ω で振動する、と云える。 ϕ は造波板運動に対する着力点振動の位相である。

4.2 波力発電の理論

本章では試験水槽に設置されている造波板を考えている。この造波板には板を駆動するための電動装置が付いている。これを仮想的に発電機に置き換え、造波板に波を入射させるようにすれば、理屈上は「試験水槽内での波力発電」を実現できる。この設定では、波の出入りと造波板運動とを単純化できる。そのため紙と鉛筆のみで議論を進めることができる。また、本節は、波理論と振動論の総合問題である。大学で学修した力学の総復習のために本節の内容をよく咀嚼していただきたい。

4.2.1 立式および解の導出

ピストン型造波板を「波力を受けて運動する物体」と見なして理論をつくり、その解を求めてみよう。

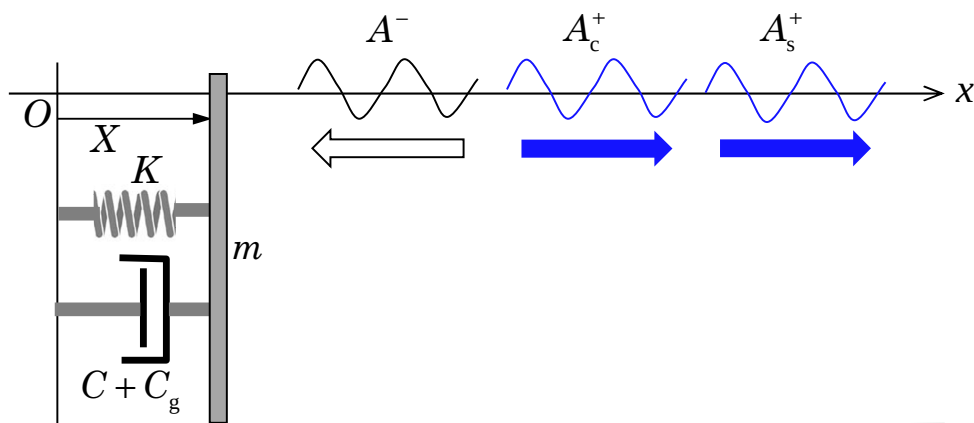


図 4.9

この板はばねに支持され力学系が振動系としてあつかえるものとする。板の水平方向変位を X と書く。板の質量を m 、ばね定数を K とする。この振動系は減衰系でもあるものとし、減衰をもたらす要因として、機械損失（減衰係数 c ）と発電負荷（減衰係数 c_g ）とを想定する。板に作用する外力を F_H と表す。運動方程式は次のように書ける。

$$m\ddot{X} + (c + c_g)\dot{X} + KX = F_H. \quad (4.75)$$

この造波板に振幅 A^- の $\sin$ 波が x 軸負方向に入射し、造波板の地点において発生する反射が x 軸正方向に伝搬するものとする。反射波は振幅 A_c^+ の $\cos$ 波と、振幅 A_s^+ の $\sin$ 波との重ね合わせで表現する。このとき速度ポテンシャルは次の様に書ける。

$$\phi(x, z, t) = \frac{\omega}{k} \frac{\cosh\{k(h+z)\}}{\sinh(kh)} \left\{ A_s^+ \sin(kx - \omega t) + A_c^+ \cos(kx - \omega t) + A^- \sin(kx + \omega t) \right\}. \quad (4.76)$$

この解の表示では、海底面における運動学的境界条件が既に満たされる形になっている。

板の運動変位 X を次式のように、振幅 X_c の $\cos$ 変動成分と、振幅 X_s の $\sin$ 変動成分との重ね合わせで表現する。

$$X = X_s \sin \omega t + X_c \cos \omega t. \quad (4.77)$$

F_H を速度ポテンシャルを用いて表す。 $x = 0$ における圧力は、

$$p(x = 0, z, t) = \rho \frac{\omega^2}{k} \frac{\cosh\{k(h+z)\}}{\sinh(kh)} \left\{ (-A_s^+ + A^-) \cos \omega t - A_c^+ \sin \omega t \right\} \quad (4.78)$$

であるから造波板に作用する流体力は、

$$\begin{aligned} F_H &= \int_{-h}^0 p(x = 0, z, t) dz \\ &= \rho g h \frac{1}{kh} \frac{\sinh(kh)}{\cosh(kh)} \left\{ (-A_s^+ + A^-) \cos \omega t - A_c^+ \sin \omega t \right\} \end{aligned} \quad (4.79)$$

である。これを運動方程式に代入し整理すると、

$$\begin{aligned} &\left\{ -m\omega^2 X_c + (c + c_g)\omega X_s + KX_c - \rho g h \frac{\tanh(kh)}{kh} (-A_s^+ + A^-) \right\} \cos \omega t \\ &+ \left\{ -m\omega^2 X_s - (c + c_g)\omega X_c + KX_s + \rho g h \frac{\tanh(kh)}{kh} A_c^+ \right\} \sin \omega t = 0 \end{aligned} \quad (4.80)$$

が得られ、これが任意の時刻で成り立つことから、

$$\begin{cases} (-m\omega^2 + K)X_c + (c + c_g)\omega X_s - \rho g h \frac{\tanh(kh)}{kh} (-A_s^+ + A^-) = 0 \\ (-m\omega^2 + K)X_s - (c + c_g)\omega X_c + \rho g h \frac{\tanh(kh)}{kh} A_c^+ = 0 \end{cases} \quad (4.81)$$

が成り立つ。

造波板表面上で成り立つ（線形化された）運動学的条件は、

$$\omega \frac{\cosh \{k(h+z)\}}{\sinh(kh)} \{ (A_s^+ + A^-) \cos \omega t + A_c^+ \sin \omega t \} = \omega (-X_c \sin \omega t + X_s \cos \omega t). \quad (4.82)$$

である。これが任意の時刻で成立するから、

$$\begin{cases} \omega \frac{\cosh \{k(h+z)\}}{\sinh(kh)} (A_s^+ + A^-) = \omega X_s \\ \omega \frac{\cosh \{k(h+z)\}}{\sinh(kh)} A_c^+ = -\omega X_c \end{cases} \quad (4.83)$$

である。(4.83) の両辺に $\cosh \{k(h+z)\}$ をかけて z に関して $-h$ から 0 まで積分する。得られた結

果を、時間の基準を $\sqrt{\frac{h}{g}}$ 、長さの基準を A^- にとって無次元化すると次式を得る。

$$\begin{cases} f_1(kh)(A_s' + 1) = X_s' \\ f_1(kh)A_c' = -X_c' \end{cases}, \quad (4.84)$$

ここで、 $X_c' \equiv \frac{X_c}{A^-}$ 、 $X_s' \equiv \frac{X_s}{A^-}$ 、 $A_c' \equiv \frac{A_c^+}{A^-}$ 、 $A_s' \equiv \frac{A_s^+}{A^-}$ である。

また、 kh の関数 f_1 を次の様に定義した。

$$f_1 \equiv \frac{\frac{1}{2} \sinh(2kh) + kh}{2 \sinh^2(kh)} \quad (4.85)$$

演習問題 4-6.

下線部 [1] に「(4.83) の両辺に $\cosh \{k(h+z)\}$ をかけて」とある。なぜそうするのか説明せよ。

運動方程式から導かれた (4.81) を、質量の基準を m 、時間の基準を $\sqrt{\frac{h}{g}}$ 、長さの基準を A^- にとって無次元化する。

$$\begin{cases} -(\omega'^2 - \omega_n'^2)X_c' + 2(\gamma + \gamma_g)\omega_n'\omega_n'X_s' - \frac{1}{\beta}f_2(kh)(-A_s' + 1) = 0 \\ -(\omega'^2 - \omega_n'^2)X_s' - 2(\gamma + \gamma_g)\omega_n'\omega_n'X_c' + \frac{1}{\beta}f_2(kh)A_c' = 0, \end{cases} \quad (4.86)$$

ここで、 kh の関数 f_2 を

$$f_2 \equiv \frac{\tanh(kh)}{kh} \quad (4.87)$$

と定義した。また、減衰比を以下の様に定義した。

$$\gamma \equiv \frac{c}{2\sqrt{mK}}, \text{ および, } \gamma_g \equiv \frac{c_g}{2\sqrt{mK}}. \quad (4.88)$$

(4.84)、(4.86) を (X'_c, X'_s, A'_c, A'_s) に関する (4 元) 連立方程式と見て解くと次の解を得る。

$$X'_c = - \frac{2\frac{1}{\beta}(\omega'^2 - \omega_n'^2)}{(\omega'^2 - \omega_n'^2)^2 + \left\{ 2(\gamma + \gamma_g)\omega'_n\omega' + \frac{1}{\beta}\frac{f_2}{f_1} \right\}^2} f_2, \quad (4.89)$$

$$X'_s = \frac{2\frac{1}{\beta} \left\{ 2(\gamma + \gamma_g)\omega'_n\omega' + \frac{1}{\beta}\frac{f_2}{f_1} \right\}}{(\omega'^2 - \omega_n'^2)^2 + \left\{ 2(\gamma + \gamma_g)\omega'_n\omega' + \frac{1}{\beta}\frac{f_2}{f_1} \right\}^2} f_2, \quad (4.90)$$

$$A'_c = \frac{2\frac{1}{\beta}(\omega'^2 - \omega_n'^2)}{(\omega'^2 - \omega_n'^2)^2 + \left\{ 2(\gamma + \gamma_g)\omega'_n\omega' + \frac{1}{\beta}\frac{f_2}{f_1} \right\}^2} \frac{f_2}{f_1}, \quad (4.91)$$

$$A'_s = \frac{2\frac{1}{\beta} \left\{ 2(\gamma + \gamma_g)\omega'_n\omega' + \frac{1}{\beta}\frac{f_2}{f_1} \right\}}{(\omega'^2 - \omega_n'^2)^2 + \left\{ 2(\gamma + \gamma_g)\omega'_n\omega' + \frac{1}{\beta}\frac{f_2}{f_1} \right\}^2} \frac{f_2}{f_1} - 1. \quad (4.92)$$

演習問題 4-7.

本節ではピストン型造波板をもつ水槽を波力発電に見立てた。同様にフラップ型造波板の場合の理論の構築を試みよう。ピストン型と異なる部分は運動方程式 (4.75) と運動学的条件 (4.82-4.84) だけである。あとは本節と同様の無次元化を行うことにより、ほぼ同じかたちの理論式が導出される。結局、ピストン型の場合における解の導出過程を、ほぼ追跡するかたちでフラップ型の場合の解を求められる。このことを証明せよ。

フラップ型の場合は回転運動となる。流体力モーメントを計算する際、造波板の微小面積に作用する流体力のレバーは水深 z に依存することに注意せよ。

4.2.2 エネルギー収支

前節にて求めた波の振幅および板の動揺振幅を用いて力学系のエネルギー収支を計算するためにエネルギー保存則を導く。ここでは、次元を有する運動方程式から再出発して愚直に仕事率（パワー）を定義通りに計算していく。

運動方程式の各項に造波板運動の速度 $\dot{X}$ を乗じ、各項を一周期の時間平均をとる。

$$\frac{1}{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi/\omega} \left\{ m\ddot{X}\dot{X} + (c + c_g)\dot{X}^2 + KX\dot{X} \right\} dt = \frac{1}{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi/\omega} F_H\dot{X} dt \quad (4.93)$$

上記の時間平均により、慣性力および復原力の項はゼロとなる一方、減衰力および外力の項はゼロとはならない。すなわち、時間平均として見るとダンパー（振動を減衰させる機構）で消費されるエネルギーが、外力（流体力）による造波板への仕事とつりあっている*7。

上記の計算により、ダンパーでの消費エネルギーの大きさは、

$$\frac{1}{2}(c + c_g)(X_s^2 + X_c^2) \quad (4.94)$$

である。

(4.94) を無次元化し、(4.89)、(4.90) を代入すると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(c + c_g)(X_s^2 + X_c^2) \frac{1}{m\frac{g}{h}\sqrt{\frac{g}{h}}(A^-)^2} \\ &= (\gamma + \gamma_g)\omega'_n(\omega')^2(X_c'^2 + X_s'^2) \\ &= 4 \frac{\frac{1}{\beta^2}(\gamma + \gamma_g)\omega'_n\omega'}{(\omega'^2 - \omega_n'^2)^2 + \left\{ 2(\gamma + \gamma_g)\omega'_n\omega' + \frac{1}{\beta}\frac{f_2}{f_1} \right\}^2} \omega'(f_2)^2 \end{aligned} \quad (4.95)$$

を得る。

続いて、波によるエネルギー輸送を解析してみる。造波板の向きに振幅 A^- で進行してきた波は反射し造波板から遠ざかる向きに伝搬していく。この伝搬にともなって遠方へ輸送されるエネルギーは、(3.98) を用いると、

$$\frac{1}{2}\rho g(A_c^2 + A_s^2)c_g \quad (4.96)$$

*7 ここでいうエネルギー収支のつり合い（平衡）は、長い期間内における平均値が満たす関係であり、時々刻々成り立つということではない点に注意。慣性力や復原力も個々の時間では仕事をしている。

と書ける。これを無次元化し、(4.91)、(4.92) を代入すると、

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \rho g (A_c^2 + A_s^2) c_g \frac{1}{m \frac{g}{h} \sqrt{\frac{g}{h}} (A^-)^2} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\beta} \omega' \frac{1}{kh} \frac{\frac{1}{2} \sinh(2kh) + kh}{2 \cosh(kh) \sinh(kh)} (A_c'^2 + A_s'^2) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\beta} \omega' \frac{1}{kh} \frac{\frac{1}{2} \sinh(2kh) + kh}{2 \cosh(kh) \sinh(kh)} \times \\
 & \quad \left[1 - 4 \frac{\frac{1}{\beta^2} (\gamma + \gamma_g) \omega'_n \omega'}{(\omega'^2 - \omega_n'^2)^2 + \left\{ 2(\gamma + \gamma_g) \omega'_n \omega' + \frac{1}{\beta} \frac{f_2}{f_1} \right\}^2} \frac{f_2}{f_1} \right]
 \end{aligned}$$

となる。ここで上式の大かっこ $[\dots]$ の中に二つの項がある。これらにはそれぞれ物理的な意味がある*8。それを踏まえて次のように変形する。

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\beta} \frac{\omega'}{kh} \frac{\frac{1}{2} \sinh(2kh) + kh}{2 \cosh(kh) \sinh(kh)} \\
 & \quad \equiv c'_g \\
 & \quad - 4 \frac{\frac{1}{\beta^2} (\gamma + \gamma_g) \omega'_n \omega'}{(\omega'^2 - \omega_n'^2)^2 + \left\{ 2(\gamma + \gamma_g) \omega'_n \omega' + \frac{1}{\beta} \frac{f_2}{f_1} \right\}^2} \omega' \frac{1}{kh} \frac{\sinh(kh)}{\cosh(kh)} f_2 \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{\beta} c'_g}{\text{入射エネルギー}} \\
 & \quad - 4 \frac{\frac{1}{\beta^2} (\gamma + \gamma_g) \omega'_n \omega'}{(\omega'^2 - \omega_n'^2)^2 + \left\{ 2(\gamma + \gamma_g) \omega'_n \omega' + \frac{1}{\beta} \frac{f_2}{f_1} \right\}^2} \omega' (f_2)^2 \\
 & \quad \text{消費エネルギー}
 \end{aligned} \tag{4.97}$$

を得る。 c'_g は無次元化した群速度である。最後に得られた式の第1項は入射波が輸送するエネルギーに他ならず、また第2項は(4.95)と一致している。このことから、

$$(\text{反射して遠方へ輸送されるエネルギー}) = (\text{入射エネルギー}) - (\text{消費エネルギー})$$

*8 通分してしまうと物理的な意味が見えなくなる。

という風なエネルギー収支が成立していることが確認される。

ダンパーでの消費エネルギーのうち、発電にともなって消費される分は、

$$4 \frac{\frac{1}{\beta^2} \gamma_g \omega'_n \omega'}{(\omega'^2 - \omega_n'^2)^2 + \left\{ 2(\gamma + \gamma_g) \omega'_n \omega' + \frac{1}{\beta} \frac{f_2}{f_1} \right\}^2} \omega' (f_2)^2 \quad (4.98)$$

である。波力発電により得られる有用な電気エネルギーをなるべく大きくするには、理論上は、(4.98) で表される量を、制約条件を満たしつつ最大化できればよい。 γ で表される機械損失の大きさに対してはそれを最小化する努力が既になされたものと仮定し γ を定数としてあつかう。それ以外のパラメータのうち変更が可能なものとして発電負荷を決める γ_g 、固有振動数 ω_n がある。この2つのパラメータを変化させる（調節する）ことで獲得できるパワーがどのように変化するかを調べてみよう。

下表は以下に示す計算で用いた各パラメータの暫定値である。定数としてあつかう場合にはこの暫定値を用いるが、変数と見なす場合には暫定値に固定しているわけでないことに注意してほしい。

表 4.2 計算に用いた暫定値。

g	9.81 m s ⁻²
h	50.0 m
β	1.0
γ	0.01
γ_g	0.01

発電負荷の調節

消費エネルギーを γ_g の関数と見てその極値問題を解いてみよう。(4.98) を γ_g で偏微分して、その微分係数が0になる γ_g を求めると次式を得る。

$$\gamma_g = \left[\gamma^2 + \frac{1}{4\omega_n'^2 \omega'^2} \left\{ (\omega'^2 - \omega_n'^2)^2 + 4\gamma \omega'_n \omega' \frac{1}{\beta} \frac{f_2}{f_1} + \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{f_2}{f_1} \right)^2 \right\} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.99)$$

(4.99) により計算される γ_g が実現されるように発電機を作れば獲得エネルギーを最大化できるはずである。その最大値は、(4.100) である（図 4.10 の赤破線）。

$$\frac{1}{\beta^2} \omega' (f_2)^2 \frac{1}{2(\gamma_g + \gamma) \omega'_n \omega' + \frac{f_2}{f_1} \frac{1}{\beta}}. \quad (4.100)$$

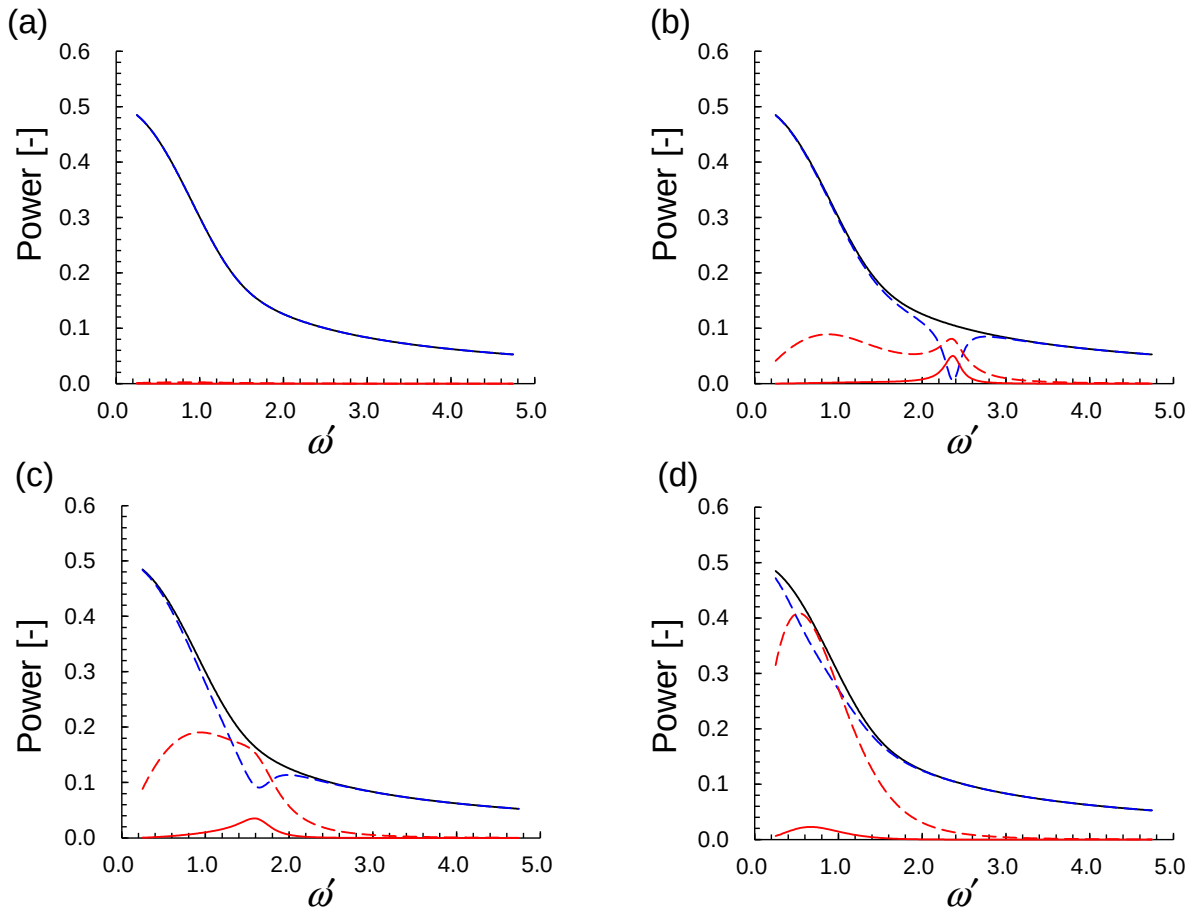


図 4.10 (a) $\omega'_n = 14.2$ 、(b) $\omega'_n = 2.36$ 、(c) $\omega'_n = 1.58$ 、(d) $\omega'_n = 0.71$ 。

ここで、最大値 (4.100) が本当に実現されうるか改めて吟味してみよう。(4.99) が与える γ_g を計算してみると図 4.11 の実線の様になる。

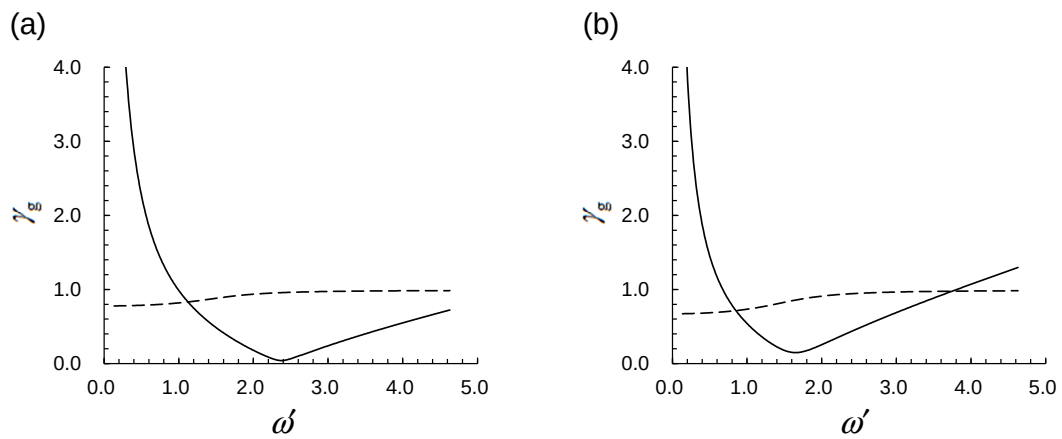


図 4.11

ここで、 γ_g は減衰比であるから、次に述べることに注意を払わなくてはならない。(4.89) - (4.92) の分母に現れる次の部分に注目しよう。

$$2(\gamma + \gamma_g)\omega'_n\omega' + \frac{1}{\beta} \frac{f_2}{f_1}. \quad (4.101)$$

上式に、いま考えている力学系が内在するすべての減衰効果が集約されている。このことを踏まえて次のように書き換えてみよう。

$$2(\gamma + \gamma_g + \gamma_w)\omega'_n\omega', \quad (4.102)$$

$$\gamma_w \equiv \frac{1}{2\beta} \frac{f_2}{f_1} \frac{1}{\omega'_n\omega'}. \quad (4.103)$$

上式で定義した γ_w は、機械による減衰ではなく、板が動揺することによる造波にともなう減衰の効果を表している。入射波が供給するエネルギーのうち、かなりの割合が反射波により遠方へ運び去られる。このことが γ_w に密接にかかわっている。

発電の増量化を目的として発電機内の抵抗を際限なく大きくすることには注意を要する。力学系に含まれる減衰比の総計が1を超えると振動を継続させることはできなくなる（過減衰とよばれる状態）。したがって、振動系を維持するためには、次式で表されるように減衰比の総計が1を下回るようにしなければならない。

$$\gamma + \gamma_g + \gamma_w < 1. \quad (4.104)$$

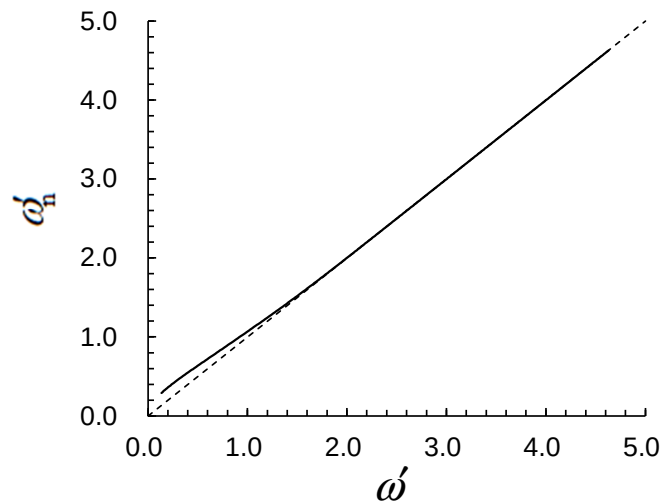
このことが γ_g の範囲に制約を与え、造波減衰の存在はこの制約を厳しくする方向に作用する。図 4.11 の破線が γ_g の上限である。 γ_g の調整を通じての獲得エネルギー最大化は、この図の実線が破線よりも下にある範囲でのみ可能である。

固有振動数の調節

次に消費エネルギーを ω'_n の関数と見て極値問題を解いてみる。(4.98) を ω'_n で偏微分することで、その微分係数が0になる ω'_n が次の様に求まる。

$$\begin{aligned} (\omega'_n)^2 &= \frac{1}{3} \{1 - 2(\gamma + \gamma_g)^2\} (\omega')^2 \\ &+ \frac{1}{3} \left[\left\{1 - 2(\gamma + \gamma_g)^2\right\}^2 + 3 \right] (\omega')^4 + 3 \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{f_2}{f_1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.105)$$

(4.105) を用いて各 ω' に対して ω'_n を計算すると、図 4.12 の実線のようになる。

図 4.12 実線： ω'_n 、破線： ω'

大雑把な傾向として、 ω'_n を ω' に近い値することで最適化できることが伺える。また、 ω'_n を用いて計算した消費エネルギーは図 4.13 の赤破線のようにプロットされる。

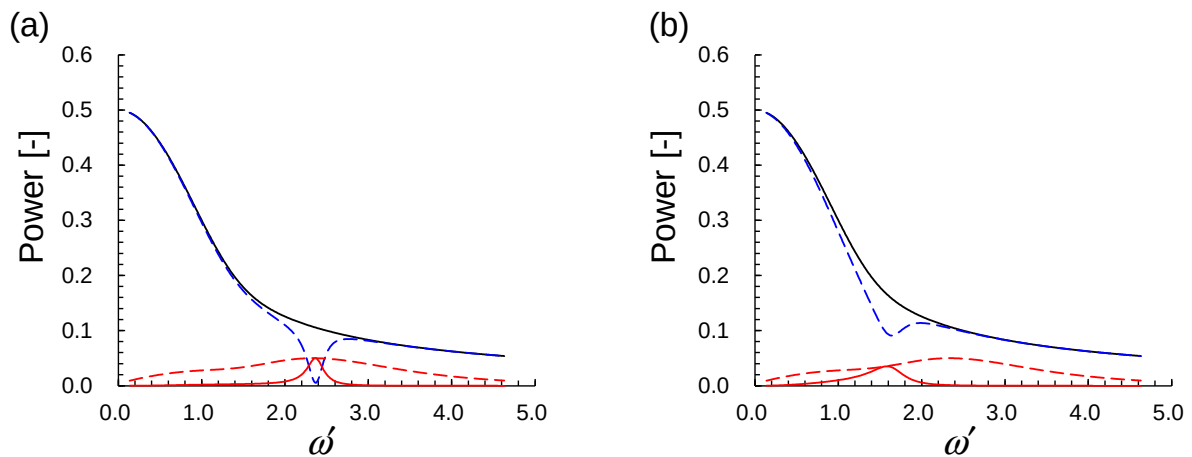


図 4.13

この赤破線は、入射してくる波の周波数 ω' が既知であり、それに対応させて ω'_n を (4.105) を用いて ω'_n 変化させることが可能ならば実現されうるパワーである。

4.2.3 出力の期待値

前節までに行った規則波に関する議論を不規則波へと拡張させる。規則波の理論は周波数を独立変数として扱うから、周波数がある値に固定し、その条件のもとで起こる現象を解析し、発電装置の設計を最適化が可能である。しかし、不規則波は無数の規則波が重ね合わさって構成される

から、ある特定の周波数に対して得られた解はそのまの形では不規則波条件下では適用できない。

各周波数成分が確率的に出現する。その確率分布が既知であることはシステムへの入力に関する確率分布が既知であることを意味するから、周波数応答関数（規則波理論の解）が求められているとするなら、出力の確率分布も把握でき、統計的にならば出力の性質を詳らかにできるはずである。

波のパワースペクトルは上記の入力に関する確率分布そのものである。したがって、よく知られている波のパワースペクトルを利用することで出力のスペクトルを算出でき、そのうえでの最適化も可能であろう。

ここでは、波力発電の出力に関し、統計学的な意味での代表値のひとつである、0次モーメントの算出を学修しよう。パワースペクトルとして、P-M型(1.101)を採用しよう。ダンパーでの消費エネルギー（有次元）(4.94)を

$$\frac{1}{2}(c + c_g)(X_s^2 + X_c^2) = \frac{1}{2}(c + c_g) \{ (X'_s)^2 + (X'_c)^2 \} (A^-)^2 \quad (4.106)$$

のように書き換えたうえで、 $(A^-)^2$ を $S_{PM}(\omega)d\omega$ に置き換える。得られた式を $m \frac{h}{g} \sqrt{\frac{h}{g}} \left(\frac{\bar{H}}{2} \right)^2$ で割ることで無次元化する。ここで長さの基準値として有義波高の半分 $\frac{\bar{H}}{2}$ （広い意味での振幅）を用いる。その結果、

$$\frac{16 \frac{1}{\beta^2} (\gamma + \gamma_g) \omega'_n (\omega')^2}{(\omega'^2 - \omega_n'^2)^2 + \left\{ 2(\gamma + \gamma_g) \omega'_n \omega' + \frac{1}{\beta} \frac{f_2}{f_1} \right\}^2} (f_2)^2 S'_{PM}(\omega') \bar{T}' d\omega' \quad (4.107)$$

を得る。ここで、 $\bar{T}' \equiv \bar{T} \sqrt{\frac{g}{h}}$ （無次元化した有義波周期）である。

これを周波数領域で積分することで、消費エネルギーの0次モーメントが計算できる。0次モーメントは被積分関数（出力）と横軸との間の面積を表し、その面積の大きさが出力の期待値を与えるから設計の評価指標のひとつとして使える。例として、固有振動数を変化させながら0次モーメントを計算した結果が図4.14(b)である。波パワースペクトル（入力）のピークを与える周波数の近辺に出力のピークが位置しているから、共振を起こすことをねらった設計が概ね最適設計になることが期待できる。

4.3 ● 3次元問題

続いて、3次元問題を考える。両側に側壁を有する水槽での造波を考えていく。鉛直2次元問題と比べると水平の空間次元がひとつ増えたものである。支配方程式、境界条件は前節で扱ったものと同じであるので、解を求めるための最初の過程は省略する。3次元空間内での速度ポテンシャル

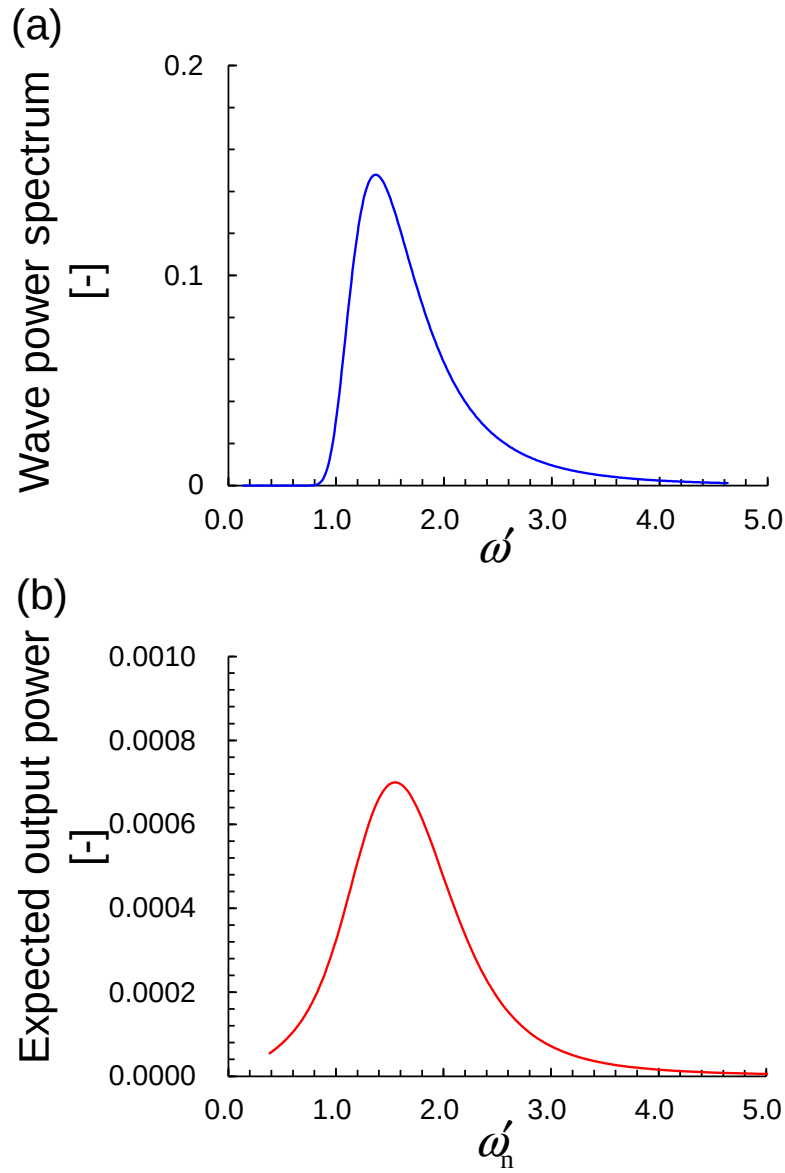


図 4.14 (a) S'_{PM} and (b) 固有振動数と 0 次モーメントとの関係

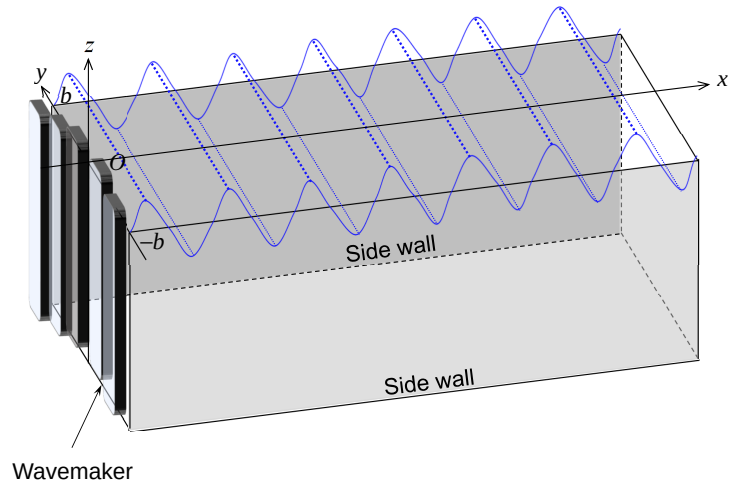
$\Phi(x, y, z, t)$ は次の様に見える。

$$\Phi(x, y, z, t) = \underbrace{\phi(x, y)}_{(A)} \underbrace{\frac{\cosh(h+z)}{\cosh(kh)}}_{(B)} \underbrace{e^{-i\omega t}}_{(C)}. \quad (4.108)$$

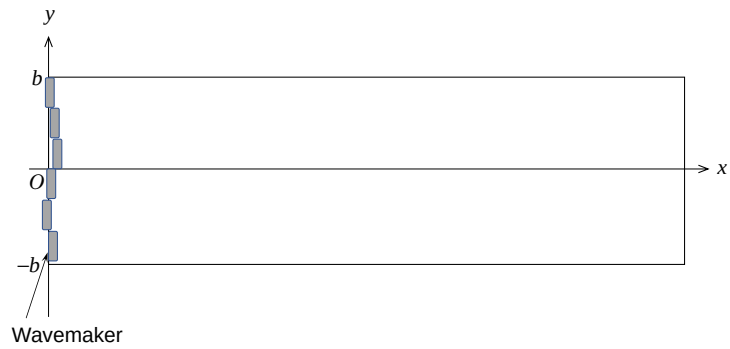
下線を引いた各因子の物理的な意味は次の通りである。

(A) 水平座標 (x, y) に依存する因子。

(B) 鉛直座標 z に依存する因子。既に海底境界条件を満たす形になっている。



(a)



(b)

図 4.15

(C) 周波数 ω で周期的に時間変動することを表現する因子。

(4.108) をラプラス方程式に代入することで $\phi(x, y)$ が満たす次の方程式（ヘルムホルツ方程式という）が得られる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k^2 \phi = 0. \quad (4.109)$$

側壁で満たされる境界条件は、海底境界条件と同様で「壁を貫く向きの流れはない」という条件（運動学的条件）であり以下の様に表現される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \text{ at } y = \pm b. \quad (4.110)$$

この条件から速度ポテンシャルの y 依存性が定まり、その結果、 $\phi(x, y)$ は次の様に書ける。

$$\phi(x, y) = \hat{\phi}(x) \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n y + b_n \sin \gamma_n y),$$

$$\text{where } \lambda_n \equiv n \frac{\pi}{b} \text{ and } \gamma_n \equiv \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{b}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4.111)$$

ここで a_n と b_n は未知定数である。

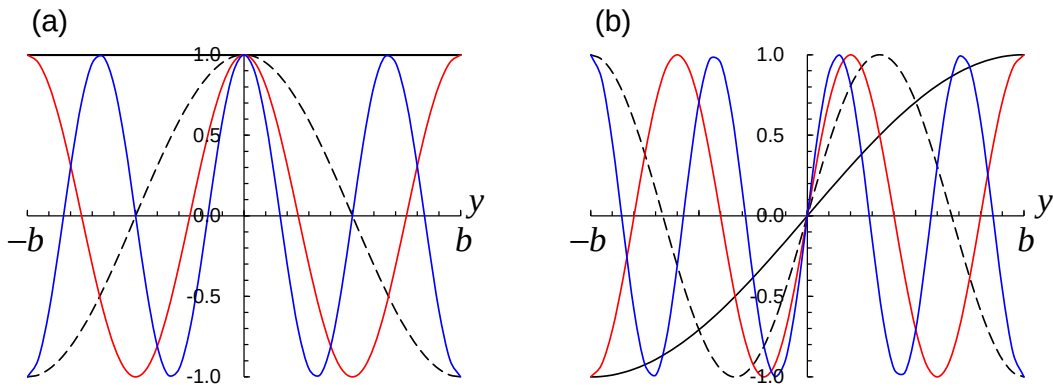


図 4.16 y 方向固有関数 (a) $\cos \lambda_n y$ 、(b) $\sin \gamma_n y$ 。 $n = 0$ (黒実線)、 $n = 1$ (黒破線)、 $n = 2$ (赤実線)、 $n = 3$ (青実線) のみ描いている。

$\hat{\phi}(x)$ は x のみに依存する因子である。これが満たす方程式を導くために、(4.111) を (4.109) へ代入すると、

$$\frac{d^2 \hat{\phi}}{dx^2} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n y + b_n \sin \gamma_n y) + \hat{\phi} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n (-\lambda_n^2) \cos \lambda_n y + b_n (-\gamma_n^2) \sin \gamma_n y) + k^2 \hat{\phi} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n y + b_n \sin \gamma_n y) = 0,$$

したがって、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cos \lambda_n y \left\{ \frac{d^2 \hat{\phi}}{dx^2} + (-\lambda_n^2 + k^2) \hat{\phi} \right\} + b_n \sin \gamma_n y \left\{ \frac{d^2 \hat{\phi}}{dx^2} + (-\gamma_n^2 + k^2) \hat{\phi} \right\} \right] = 0 \quad (4.112)$$

であり、これが区間 $[-b, b]$ における任意の y に対して成り立つから、

$$\frac{d^2 \hat{\phi}}{dx^2} + (-\lambda_n^2 + k^2) \hat{\phi} = 0, \quad (4.113)$$

$$\frac{d^2 \hat{\phi}}{dx^2} + (-\gamma_n^2 + k^2) \hat{\phi} = 0. \quad (4.114)$$

以下の因子を含む項の重ね合わせ（線形結合）が一般解となる。ここで指数関数の肩の部分をよく観察しておこう。根号の中が正であれば Progressive モードであり、それぞれ下線部に示す方向（ x 軸方向）に伝わる。

$$\frac{e^{i\sqrt{-\lambda_n^2+k^2}x}}{\text{正方向}}, \frac{e^{-i\sqrt{-\lambda_n^2+k^2}x}}{\text{負方向}}, \frac{e^{i\sqrt{-\gamma_n^2+k^2}x}}{\text{正方向}}, \text{ and } \frac{e^{-i\sqrt{-\gamma_n^2+k^2}x}}{\text{負方向}}. \quad (4.115)$$

一方、根号の中が負の場合、つまり

$$\lambda_n > k, \text{ and } \gamma_n > k. \quad (4.116)$$

の場合は、Evanescant モードとなる。よって x 方向に伝搬する波の y 方向波数には最大値が存在し、 y 方向の波数がそれを超える波は x 方向には伝搬できない。

ここからは簡略化のため、 $x = 0$ において発生し x 軸正方向に進行する波だけを考慮しよう。造波板設置場所の遠方（例えば $x = L$ 地点）に波の進行によって阻害となる物体がある場合には x 軸負方向の反射波が発生することになるが、ここではそのような阻害物はないものとする。この条件下で $\hat{\phi}(x)$ を次の様に書こう。

$$\phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{i\sqrt{-\lambda_n^2+k^2}x} \cos \lambda_n y + \sum_{n=0}^{\infty} B_n e^{i\sqrt{-\gamma_n^2+k^2}x} \sin \gamma_n y, \quad (4.117)$$

ここで A_n 、 B_n は未知定数である。

前節と同じように造波板表面上での運動学的境界条件を課し未知定数を定める式を導く。造波板表面を表す式を次のように仮定する。

$$F(x, y, z, t) = x - \frac{1}{2} S_0 g(z) e^{i(l_0 y - \omega t)} = 0, \quad -b \leq y \leq b \quad (4.118)$$

ここで、 S_0 は造波板運動の最大ストローク、 $g(z)$ は鉛直方向の形状を決める関数（前節の鉛直2次元問題と同様）、 l_0 は造波板運動の y 方向波数である。 $-b \leq y \leq b$ は造波板が水槽の横幅いっぱいに設置されていることを表す。もちろん、 $|y| \leq b$ を満たす y であれば任意の区間に設置してよいのだが、ここでは最も簡単な場合をあつかう。線形化された運動学的境界条件は、

$$u(x=0, y, t) = -i\omega \frac{1}{2} S_0 g(z) e^{i(l_0 y - \omega t)}, \quad (4.119)$$

ここで $u(x, y, z, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ である。この条件式に (4.108) を代入すると、

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} A_n i\sqrt{-\lambda_n^2+k^2} \cos \lambda_n y + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sqrt{-\gamma_n^2+k^2} \sin \gamma_n y \right\} \frac{\cosh \{k(h+z)\}}{\cosh(kh)} e^{-i\omega t} \\ = -\frac{1}{2} \omega S_0 (i \cos l_0 y - \sin l_0 y) g(z) e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (4.120)$$

であり、これが任意の時刻 t において成立するから、

$$\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} A_n i \sqrt{-\lambda_n^2 + k^2} \cos \lambda_n y + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sqrt{-\gamma_n^2 + k^2} \sin \gamma_n y \right\} \frac{\cosh \{k(h+z)\}}{\cosh(kh)} = -\frac{1}{2} \omega S_0 (i \cos l_0 y - \sin l_0 y) g(z). \quad (4.121)$$

(4.121) の両辺に $\cosh \{k(h+z)\}$ をかけて $z = -h$ (海底) から $z = 0$ (海水表面) まで鉛直積分すると次式を得る。

$$\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} A_n i \sqrt{-\lambda_n^2 + k^2} \cos \lambda_n y + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sqrt{-\gamma_n^2 + k^2} \sin \gamma_n y \right\} = -\frac{1}{2} \omega S_0 (i \cos l_0 y - \sin l_0 y) G. \quad (4.122)$$

ここで G は次のように定義される定数である。

$$G \equiv \frac{\int_{-h}^0 g(z) \cosh \{k(h+z)\} dz}{\int_{-h}^0 \cosh^2 \{k(h+z)\} dz} \cosh(kh). \quad (4.123)$$

G の分子にある定積分は関数 $g(z)$ と関数 $\cosh \{k(h+z)\}$ との相関 (correlation) を決める。分母の積分は、その相関を規格化するためのものと解釈できる。 $g(z)$ は造波板の鉛直方向の形状であり、 $\cosh \{k(h+z)\}$ は水粒子運動の鉛直方向分布であるから、この両者の相関が高ければ造波板の運動が造波に与える影響は大きくなる。無相関であれば造波板がどれだけ運動しても波は起きないことが分子の積分によって表現されている。

演習問題 4-8.

「どんなに動いても波を起こせない」造波板をつくることになったとしよう。そこで、 $G = 0$ となるような $g(z)$ をみつけられよいという方針を立てた。もし、そのような $g(z)$ が存在すれば、数学的証明とともに提示せよ。

計算^{*9}を進めよう。(4.123) の両辺に $\cos \lambda_m y$ を乗じて $y = -b$ から $y = b$ まで y に関して積分すると、係数 A_m が関与する項だけが抽出され次式を得る。

$$A_m = -\omega \frac{S_0}{2b} G \frac{2(-1)^m l_0 \sin(l_0 b)}{l_0^2 - \lambda_m^2} \frac{1}{\sqrt{-\lambda_m^2 + k^2}}. \quad (4.124)$$

^{*9} 計算量が多く四苦八苦しそうな所なので、ワンポイントアドバイス。こういう計算は、被積分関数、積分値などのもつ物理的あるいは統計的な意味を自分なりに逐一見出しながら心穏やかに行うことが望ましい (と筆者は思っている)。進めている計算が単なる算数ではなく、意味のあるものに感じられてくる。異なる次元の量が足し算されているなどの計算ミスを見つける観察力を向上させることにもなる。

これが偶関数モードの振幅である。

同様に、(4.123) の両辺に $\sin \gamma_m y$ を乗じて $y = -b$ から $y = b$ まで y に関して積分すると、係数 B_m が関与する項だけが抽出され、

$$B_m = \omega \frac{S_0}{2b} G \frac{2(-1)^m l_0 \cos(l_0 b)}{l_0^2 - \gamma_m^2} \frac{1}{\sqrt{-\gamma_m^2 + k^2}} i. \quad (4.125)$$

となり、これが奇関数モードの振幅である。

以上で本問題の理論的な解の導出は完了である。数値的に解 $\Phi(x, y, z, t)$ のふるまいを調べたいときには、 $h, b, l_0, \omega, S_0, g(z)$ などを既知量として与えたうえで、 k （厳密には Progressive モードと Evanescent モード両方に対応する k ）を計算し、そのうえで、 G 、さらには A_m, B_m を定める。重ね合わせの最大個数 N を調整しながら解を計算し、その数値が十分に収束している（ N の変更に対してほとんど変化がない）ことを確認したうえで、それを本問題の解と考え、それを土台に考察を加えていくこととなる。

ここでは考察例として、各 y 方向固有モードがもつパワーを計算することで、どのモードが最も発達（卓越）するかを推定してみる。Progressive モードのみ考えれば十分である。(4.2) を用いると、速度ポテンシャルから自由表面変位を計算できる。したがって、偶関数および奇関数の各モードの振幅^{*10}を次の様に計算することができる。

$$\overline{\eta_n^A} = \omega \frac{S_0}{2b} G \frac{2(-1)^m l_0 \sin(l_0 b)}{l_0^2 - \lambda_m^2} \frac{1}{\sqrt{-\lambda_m^2 + k^2}} k \tanh(kh), \quad (4.126)$$

$$\overline{\eta_n^B} = -\frac{S_0}{2b} \omega G \frac{2(-1)^m l_0 \cos(l_0 b)}{l_0^2 - \gamma_m^2} \frac{1}{\sqrt{-\gamma_m^2 + k^2}} k \tanh(kh) i. \quad (4.127)$$

前節の鉛直 2 次元問題と同様の方法で、パワーの無次元値を計算する。偶関数および奇関数の各モードのパワーをそれぞれ P_n^A, P_n^B と表すことにする。(4.126)、(4.127) を用いると、

$$P_n^A = \frac{4l_0^2 \sin^2(l_0 b)}{(l_0^2 - \lambda_n^2)^2 b^2} \cdot \frac{k^2}{(-\lambda_n^2 + k^2)} \cdot F^*, \quad (4.128)$$

$$P_n^B = \frac{4l_0^2 \cos^2(l_0 b)}{(l_0^2 - \gamma_n^2)^2 b^2} \cdot \frac{k^2}{(-\gamma_n^2 + k^2)} \cdot F^* \quad (4.129)$$

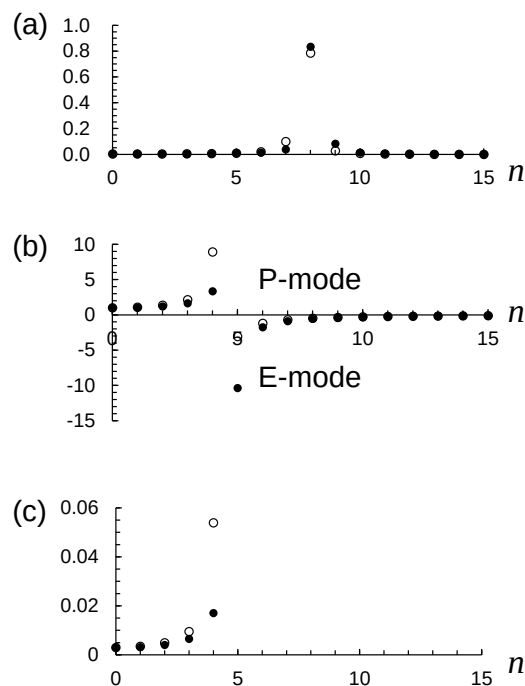
と表せる。ここで F^* は、 $x = kh$ のみに依存する因子であり、鉛直 2 次元問題で既に計算した量 (4.43) および (4.45) である。

y 方向波数 λ_n, γ_n に依存する因子 (A1, A2, B1, B2) の n に対する変化を調べる。ここで計算に用いた数値は表 4.3 に記した。因子 A1, B1 は $n = 8$ において目立って大きい値を示している。

^{*10} この段階では複素振幅であり、一般的には複素数でもよいことに注意。

表 4.3 計算に用いた数値。

b	3.50 m
h	3.50 m
kh	15.0
$l_0 b$	$\frac{33}{4}\pi$

図 4.17 (a) A_1, B_1 , (b) A_2, B_2 , (c) $A_1 \times A_2, B_1 \times B_2$. ● : 偶関数モード、○ : 奇関数モード。

因子 A_2, B_2 は $n = 0$ から $n = 4$ までは正であり、 $n = 5$ 以上では負である。因子 A_2, B_2 が正負はそれぞれ、Progressive モード（正）、Evanescent モード（負）に対応するから、この条件下では $n = 0$ から $n = 4$ までのモードのみが x 軸方向に伝わり得る波ということになる。因子 $A_1 \times A_2$ および $B_1 \times B_2$ の計算結果から、偶関数・奇関数両モードともに、 $n = 4$ のモードが最も大きい値をもち、奇関数で $n = 4$ のモードが最大である。このことから、 y 方向の構造が $\sin\left(\frac{9}{2}\frac{\pi}{b}y\right)$ となる波が最も発達すると推定できる。

演習問題 4-9.

因子 (A_1, A_2, B_1, B_2) の物理的な意味（幾何学的な意味）を述べよ。

付録 A

本講義で必要となる応用数学、確率統計学の知識

補遺 A 加法定理

「高校で習ったから知ってる」：理系の大学生に「加法定理を知っていますか？」と問えばほぼ全員が上記のように答えると思うが、「習って知っている」とことと「使える」とこととの間にはある程度の隔たりがあることは受験を経験した人なら経験済みのことと思う。この講義の目的は、未解決問題を解くために既存の知識を活用していく姿勢を身につけることだった。ここではその原点に立ち帰り、一度習った加法定理ではあるが愚直に証明しておくことでその定理の成り立ちを改めて認識しよう。それにより、基礎的なこと（既存の知識）を大事にする練習をしてみよう。

加法定理の証明法は複数あるがここでは、単位円の幾何学的性質を用いた証明法を記す。線分 PQ の長さの二乗を考える。

$$P(\cos \alpha, \sin \alpha), Q(\cos \beta, \sin \beta) \quad (\text{A.1})$$

点 P と点 Q の座標が上記のように分かっているから二点間距離の公式を用いると

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (\cos \beta - \cos \alpha)^2 + (\sin \beta - \sin \alpha)^2 \\ &= 2 - 2 \cos \alpha \cos \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

と表せる。

また、三角形 OPQ に対し余弦定理を適用すると、

$$\begin{aligned} PQ^2 &= 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cos(\alpha - \beta) \\ &= 2 - 2 \cos(\alpha - \beta) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

と表せる。したがって、次式が恒等的に成り立つ。

$$2 - 2 \cos \alpha \cos \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta = 2 - 2 \cos(\alpha - \beta). \quad (\text{A.4})$$

整理すると、

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (\text{A.5})$$

である。

α の代わりに $\frac{\pi}{2} - \alpha$ とおくと、

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (\text{A.6})$$

が示される。

上記 2 つの加法定理の式において、 β の代わりに $-\beta$ とおくと、

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad (\text{A.7})$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (\text{A.8})$$

が示される。

(1.27) で使用した文字との対応は、 $\alpha = 2\pi \bar{f}t$ 、 $\beta = 2\pi(f_n - \bar{f})t + \epsilon_n$ である。時間の経過にともなう増加は β に比べると α の方が非常に速い。時計の針のうごきで例えると α が長針で β が短針です。加法定理の適用により三角関数の積の形へ変形したことで、時間に対して速く変動する因子とゆっくりと変動する因子に分解したことになる。

補遺 B フーリエ級数

区間 $[-l, l]$ で定義された関数 $f(x)$ が $f(l) = f(-l)$ を満たすものとする。このとき、 $f(x)$ は次の様に三角関数を用いて展開することができる。これをフーリエ級数という。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right). \quad (\text{A.9})$$

ここで、展開係数は次の様に与えられる。

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad (\text{A.10})$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \left(\frac{n\pi}{l} x \right) dx, \quad (\text{A.11})$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \left(\frac{n\pi}{l} x \right) dx. \quad (\text{A.12})$$

関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開が区間 $[-l, l]$ において一様に収束するならば Parseval identity (パーシヴァルの等式) とよばれる次の関係 (後日証明追記) が成り立つ。

$$\int_{-l}^l \{f(x)\}^2 dx = l \left\{ \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right\} \quad (\text{A.13})$$

また、関数 $f(x)$ が半区間 $[0, l]$ のみで定義されているとする。この $f(x)$ をフーリエ級数展開するために、区間を $[-l, 0]$ にも拡張したうえで展開する。関数を拡張するさいに、半区間と追加区間との境目である鉛直線 $x = 0$ に対して対称 (線対称) の形で拡張すれば、拡張された区間 $[-l, l]$ において $f(x)$ は偶関数となる。このとき $f(x)$ は次の様に、半区間余弦展開され、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (\text{A.14})$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad (\text{A.15})$$

また、次の関係式 (余弦展開に対するパーシヴァルの等式) が成り立つ。

$$\int_0^l \{(f(x))\}^2 dx = \frac{l}{2} \left(\frac{a_0^2}{2} + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots \right) \quad (\text{A.16})$$

拡張された $f(x)$ は直線 $x = 0$ において対称な偶関数であるから、 $x = 0$ において $f(x)$ の傾きは 0 となる。したがって、この $f(x)$ はノイマン境界条件 (Neumann boundary condition) を満たすことになるため、余弦展開はノイマン問題における解を求めるときに使用される。

$f(x)$ を拡張する際に原点 $x = 0$ に対して対称 (点対称) の形で拡張すれば、拡張された区間 $[-l, l]$ において $f(x)$ は奇関数となる。このとき $f(x)$ は次の様に、半区間正弦展開され、

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (\text{A.17})$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad (\text{A.18})$$

また、正弦展開に対するパーシヴァルの等式) が成り立つ。

$$\int_0^l \{(f(x))\}^2 dx = \frac{l}{2} (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \cdots) \quad (\text{A.19})$$

拡張された $f(x)$ は点 $x = 0$ において線対称な奇関数であるから、 $\frac{1}{2} \{f(+0) + f(-0)\}$ (± 0 は複合の上から 0 よりも少しだけ大きい、および、少しだけ小さい値を意味する) は 0 である。したがって、この $f(x)$ はディリクレ境界条件 (Dirichlet boundary condition) を満たすことになるため、正弦展開はディリクレ問題における解を求めるときに使用される。

$f(x)$ のフーリエ級数展開は、物理量を色々な波数 k ($=\frac{n\pi}{l}$) の成分に分解し、その重ね合わせで元の関数を表現することに他ならない。パーシヴァルの等式は、自乗積分 $\int \{f(x)\}^2 dx$ が、分解された各成分の自乗積分の和に等しいことの表現であり、これを物理的に解釈すると、エネルギーの総量が、各成分の振幅の自乗和に等しいということになる。

フーリエ級数とフーリエ変換（次節）との関係を理解するための準備として、複素フーリエ級数を定義しておく。オイラーの公式より次式が成り立つ。

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad (\text{A.20})$$

$$\sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}. \quad (\text{A.21})$$

これらを (A.9) へ代入すると

$$f(x) = \sum_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} c_n e^{ikx},$$

where $c_0 = \frac{1}{2}a_0$, $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, and $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. (A.22)

また、(A.10)-(A.12) より、

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-ikx} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{A.23})$$

補遺 C フーリエ変換

フーリエ変換を極めて端的に説明すれば、フーリエ級数で現れた有限区間を表す l を $l \rightarrow \infty$ という極限操作をした結果として得られるもの、ということになる。確認しておこう。(A.23) を (A.22) へ代入すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} \left\{ \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(y) e^{-iky} dy \right\} e^{-kx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l f(y) \left\{ \sum_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} \frac{\pi}{l} e^{ik(x-y)} \right\} dy. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$l \rightarrow \infty$ の極限における上式の下線部の極限を考える。 $\Delta\omega = \frac{\pi}{l}$ (周波数の刻み幅)、 $\omega_n = n\Delta\omega$ (n 番目の周波数) を定義すると、 $l \rightarrow \infty$ において $\Delta\omega \rightarrow 0$ であるから、下線部は

$$\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} \Delta\omega e^{i\omega_n(x-y)} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(x-y)} \quad (\text{A.25})$$

という様に積分として書ける。したがって、

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(y) e^{i\omega(x-y)} \quad (\text{A.26})$$

であり、

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy \quad (\text{A.27})$$

とおけば、この $F(\omega)$ が $f(x)$ のフーリエ変換であり、その逆変換は次の様に表される^{*1}。

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (\text{A.30})$$

パーシヴァルの等式 (Parseval identity) の一般形は次の通りである。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g^*(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G^*(\omega) d\omega \quad (\text{A.31})$$

証明は次の通りである。

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \quad (\text{A.32})$$

$$g^*(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G^*(\omega) e^{-i\omega x} d\omega. \quad (\text{A.33})$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g^*(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} G^*(\omega) e^{-i\omega x} d\omega \right\} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} G^*(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G^*(\omega) F(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

特に $f(x) = g(x)$ の場合が重要である。

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx}{f(x) \text{ のエネルギー}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F(\omega)|^2}{f(x) \text{ のエネルギー・スペクトル密度}} d\omega \quad (\text{A.35})$$

^{*1} あるいは、

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (\text{A.28})$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (\text{A.29})$$

と書いてもよい。 $f(x)$ を変換して逆変換した結果、 $f(x)$ に戻る (復元される) ように積分に係数をかけておけばよい。

補遺 D 四分位数

四分位数 (quartile) とは、データ全体を大きさで 4 つのグループ (小さい方から第 1~第 4 グループとよぶことにする) に等分したとき、各グループの境界に相当するデータのことである。最下位から数えて 25% のデータ (第 1 グループと第 2 グループの境界、25% パーセンタイル) を第 1 四分位点という。 Q_1 と書く。同様に、50% (第 1 グループと第 2 グループの境界、50% パーセンタイル)、75% (第 3 グループと第 4 グループの境界、75% パーセンタイル) をそれぞれ第 2 四分位数 (Q_2)、第 3 四分位数 (Q_3) という。 Q_2 は中央値 (median) と同等である。

補遺 E 誤差関数と相補誤差関数

ここで、 $\operatorname{erfc}(x)$ は次の様に定義される関数であり相補誤差関数 (complementary error function) とよばれる。また、誤差関数 $\operatorname{erf}(x)$ (error function) と次の関係にある。

$$\operatorname{erfc}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-x'^2} dx', \quad (\text{A.36})$$

$$\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x'^2} dx', \quad (\text{A.37})$$

$$\operatorname{erf}(x) + \operatorname{erfc}(x) = 1. \quad (\text{A.38})$$

誤差関数は、標準正規分布の累積確率密度関数

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (\text{A.39})$$

との間に

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad (\text{A.40})$$

という関係をもつ。

x が非常に小さい、すなわち $x \ll 1$ である場合には、誤差関数を初等関数の和のかたちであらわすことができ、関数の値を数値的に求めることができる。関数を文字式で表すことに満足せずに、たとえ近似を使ったとしても数式を実用可能なかたちに変換することは工学的には非常に重要な意味をもつ。 $e^{-x'^2}$ を x' のべき級数で展開すると、

$$e^{-x'^2} = 1 - x'^2 + \frac{1}{2!} x'^4 - \cdots \quad (\text{A.41})$$

である。これを誤差関数の被積分関数として代入し項別積分すると

$$\begin{aligned}\operatorname{erf}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \left(1 - x'^2 + \frac{1}{2!}x'^4 - \cdots\right) dx' \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5 \cdot 2!}x^5 - \cdots\right)\end{aligned}\quad (\text{A.42})$$

の様に、数値計算が容易な x のべき関数のかたちで展開できる。これは $x \ll 1$ において誤差関数のよい近似値を与える。 $x \gg 1$ における漸近展開も可能である。補遺 E.2 を参照されたし。

補遺 E.1 漸近展開

漸近展開 (asymptotic expansion) は関数の数値を求める時に有用な手法である。最初に漸近関数列 (asymptotic sequences) という概念を理解しよう。ある関数を漸近級数 (asymptotic series) に展開するとき基底となるのが漸近関数列である。次の条件を満たす関数列 $\phi_n(x)$ は漸近関数列であるという。

関数列 $\phi_n(x)$ がすべての n について、

$$\phi_{n+1}(x) = o[\phi_n(x)] \text{ as } x \rightarrow x_0. \quad (\text{A.43})$$

例えば次の関数列は漸近関数列である。

$$\{(x - x_0)^n\} \quad x \rightarrow x_0, \quad (\text{A.44})$$

$$\{(x - x_0)^{n/5}\} \quad x \rightarrow x_0, \quad (\text{A.45})$$

$$\{\sin^n(x - x_0)\} \quad x \rightarrow x_0, \quad (\text{A.46})$$

$$\{x^{-n}\} \quad x \rightarrow \infty \quad (\text{A.47})$$

関数 $f(x)$ を漸近関数列で展開したとき、すべての N に対して

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^N \phi_n(x) \right| \ll \phi_N(x) \text{ as } x \rightarrow x_0. \quad (\text{A.48})$$

を満たすとき、すなわち級数を第 $N+1$ 項で打ち切ったときの残差が、最終項である第 $N+1$ よりも小さいオーダーであるとき、この展開は漸近展開とよばれ、次の様に書き表す。

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x) \quad (\text{A.49})$$

補遺 E.2 相補誤差関数の漸近展開

相補誤差関数の定義式 (A.36) の被積分関数を次の様に書き替える。

$$e^{-t^2} = \frac{1}{t} t e^{-t^2} = \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right). \quad (\text{A.50})$$

これにより下記の様に部分積分のかたちに変形できる。

$$\begin{aligned} \int_x^\infty e^{-t^2} dt &= \int_x^\infty \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{2x} e^{-x^2} - \frac{1}{2} \int_x^\infty \frac{1}{t^2} e^{-t^2} dt \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

同様に、上式の右辺第 2 項の部分積分を実行すると、

$$\begin{aligned} \int_x^\infty \frac{1}{t^2} t e^{-t^2} dt &= \int_x^\infty \frac{1}{t^3} \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{2x^3} e^{-x^2} - \frac{3}{2} \int_x^\infty \frac{1}{t^4} e^{-t^2} dt \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

である。以下、同様に部分積分を続けると次の様に展開できる。

$$\text{efrc}(x) = 1 - \text{efr}(x) \sim \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 x^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 x^7} + \dots \right). \quad (\text{A.53})$$

上記の展開を e^{-x^2}/x^3 までで打ち切った場合の誤差を見積もっておく。(A.52) の右辺第 2 項は、 $1/x \geq 1/t$ であることに注意すると、

$$\int_x^\infty \frac{1}{t^4} e^{-t^2} dt < \int_x^\infty \frac{1}{x^5} (t e^{-t^2}) dt = \frac{1}{x^5} \int_x^\infty (t e^{-t^2}) dt = \frac{e^{-x^2}}{2x^5} \quad (\text{A.54})$$

という大小関係になり、 $x \gg 1$ においては $\frac{e^{-x^2}}{x^5}$ は $\frac{e^{-x^2}}{x^3}$ よりも小さいオーダーとなるから、漸近展開の性質を有しているといえる。

補遺 E.3 ラプラスの方法

ここで紹介する方法は次式で示される積分の $x \rightarrow \infty$ における漸近的なふるまいを把握するとき有用な方法である。発見者にちなんでラプラスの方法、ラプラスの積分、ラプラス近似等といわれる。応用例としてベイズ推定があり事後分布の計算に適用される。

$$I(x) = \int_a^b f(t) e^{x\phi(t)} dt, \quad (\text{A.55})$$

ここで、 $f(t)$ 、 $\phi(t)$ は実数の連続関数である。この方法の適用条件は関数 $\phi(t)$ が積分区間 $a \leq t \leq b$ の $t = c$ において最大値をとることである。 c が区間の最小値 a か最大値 b に一致する場合、 $a < c < b$ の場合において近似方法が変わるのだが、ここでは後者 ($a < c < b$ の場合) に限って紹介する。非常に大きい x に対して、積分に寄与するのは、被積分関数の $t = c$ 近傍に相当する部分だけであるから $I(x)$ は次の様に近似できる。

$$I(x) \approx I(x; \epsilon) \equiv \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} f(t) e^{x\phi(t)} dt, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (\text{A.56})$$

ここで、 ϵ は $c - \epsilon < t < c + \epsilon$ が $a < c < b$ 内に含まれるような任意の正の数である。

$\phi(t)$ が $a \leq t \leq b$ において最大値をとるという条件から、 $\phi'(c) = 0$ であり、 $\phi''(c) < 0$ であり、 $t \simeq c$ において

$$\phi(t) \simeq \phi(c) + \frac{1}{2} \phi''(c) (t - c)^2 \quad (\text{A.57})$$

と近似できる。したがって

$$\begin{aligned} I(x; \epsilon) &\sim \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} f(c) e^{x\{\phi(c) + \frac{1}{2} \phi''(c) (t-c)^2\}} dt, \quad x \rightarrow +\infty \\ &\sim f(c) e^{x\phi(c)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\{x \frac{1}{2} \phi''(c) (t-c)^2\}} dt, \quad x \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

ここで $s^2 = -\frac{1}{2} x (t - c)^2 \phi''(c)$ とおくことで積分変数を t から s へ変換する。 $\phi''(c) < 0$ であることを留意すると

$$dt = \frac{2s}{-x(t - c)\phi''(c)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-x\phi''(c)}} ds \quad (\text{A.59})$$

であるから

$$\begin{aligned} I(x; \epsilon) &\sim \frac{\sqrt{2} f(c) e^{x\phi(c)}}{\sqrt{-x\phi''(c)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds \\ &= \frac{\sqrt{2\pi} f(c) e^{x\phi(c)}}{\sqrt{-x\phi''(c)}}. \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

最後の式変形でガウス積分を用いた。

補遺 F ガンマ関数

ガンマ関数 (Γ function) は次の積分表示式 (のひとつ) をもつ。

$$\int_0^{\infty} \exp(-\beta t) t^{\alpha} dt = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\beta^{\alpha+1}}, \quad \text{where } \alpha > -1 \text{ and } \beta > 0 \quad (\text{A.61})$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \text{ 証明はシンプル。} \quad (\text{A.62})$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (\text{A.63})$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (\text{A.64})$$

ラプラス近似のかたちに一致させるために

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t} e^{x \log t} dt, \quad x \rightarrow \infty \quad (\text{A.65})$$

と変形したうえで $\psi(t) = \log t$, $f(t) = \frac{e^{-t}}{t}$ とおいてみる。 $t \rightarrow \infty$ の極限で $\psi(x) \rightarrow \infty$ であるために、このままのかたちではラプラス近似は適用できない。

そこで $\Gamma(x)$ を変形する。被積分関数を $t^{x-1} e^{-t} = \exp\{\log t^{x-1} - t\}$ と書き換えることで t で微分することで被積分関数の最大値を調べる。

$$\frac{d}{dt} [\exp\{\log t^{x-1} - t\}] = \exp\{\log t^{x-1} - t\} \left\{ (x-1) \frac{1}{t} - 1 \right\} = 0 \quad (\text{A.66})$$

より、 $t = x-1$ のとき最大となる。 $x \rightarrow \infty$ の極限をとることを考慮すると、最大値を与える $t = x-1$ も $\rightarrow \infty$ である。そこで、 t を x で割って規格化することで定義される $u = \frac{t}{x}$ に変数を変換すると、

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = x^x \int_0^\infty \frac{1}{u} \exp\{\log u - u\} du, \quad x \rightarrow \infty \quad (\text{A.67})$$

である。 $\psi(u) = \log u - u$ とおくと、 $\psi(u)$ は x に依存しない点 $u = 1$ において最大値をとる。したがって

$$\Gamma(x) \sim \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{\frac{2\pi}{x}}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (\text{A.68})$$

特に $x = n$ (n は整数) の場合、

$$n! \sim n^n \sqrt{2\pi n} e^{-n}, \quad n \rightarrow \infty \quad (\text{A.69})$$

であり、非常に大きな整数の階乗の漸近近似式であるスターリング公式が得られる。確率統計学、統計物理学で頻繁に用いられる。

補遺 F.1 オイラー定数

$$\gamma = - \int_0^{\infty} (\ln \xi) e^{-\xi} d\xi = 0.5772 \dots, \quad (\text{A.70})$$

$$\int_0^{\infty} (\ln \xi)^2 e^{-\xi} d\xi = \frac{\pi^2}{6} + \gamma^2. \quad (\text{A.71})$$

補遺 G Padé 近似

関数をべき級数のかたちで近似することは、Taylor 展開の名で知られており頻繁に用いる技法である。このべき級数を有理関数の分母と分子にもってきた次の近似

$$f(x) \simeq \frac{p_0 + p_1 x + \dots + p_L x^L}{q_0 + q_1 x + \dots + q_M x^M} \equiv [L, M](x) \quad (\text{A.72})$$

は Padé 近似とよばれ制御工学では応用に供される。Taylor 展開による値が元の関数の値から離れてしまう x の領域においても Padé 近似は元の関数の値に十分近い値を出力できる。

Padé 近似式 (A.72) が $f(x)$ のよい近似式になるように次の束縛条件を課し、それを用いて $L + M + 2$ 個の未知の展開係数 p_i ($i = 0, \dots, L$) と q_i ($i = 0, \dots, M$) を定める式を導出する。

$$\begin{cases} f(0) = [L, M](0) \\ f^{(1)}(0) = [L, M]^{(1)}(0) \\ \dots \\ f^{(L+M)}(0) = [L, M]^{(L+M)}(0) \end{cases} \quad (\text{A.73})$$

ここで $f^{(n)}(x)$ は関数 $f(x)$ の n 階導関数を表す。上記の条件は $x = 0$ において、元の関数と Padé 近似式とは値が一致し、かつ 1 階から $(L + M)$ 階までの微分係数の値が一致するというものである。

Padé 近似式を求めるためには元の関数 $f(x)$ の $x = 0$ まわりの Taylor 展開

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \quad (\text{A.74})$$

の展開係数 a_i ($i = 0, \dots, L + M$) が前もって計算されている必要がある。

(A.74) と (A.72) との差 $f(x) - [L, M](x)$ の $x = 0$ まわりの Taylor 展開

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i - \left\{ [L, M](0) + [L, M]^{(1)}(0)x + \frac{1}{2}[L, M]^{(2)}(0)x^2 + \dots \right\} \quad (\text{A.75})$$

は、条件 (A.73) から $x^0, x^1, \dots, x^{L+M}$ を含む項の係数はキャンセルして 0 になるため、 $L+M+1$ 次以上の項から構成されるべき級数となる。すなわち、

$$f(x) - [L, M](x) = \sum_{i=L+M+1}^{\infty} b_i x^i \quad (\text{A.76})$$

である。(A.76) に (A.72) と (A.74) を代入し整理すると次式を得る。

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right) \left(\sum_{i=0}^M q_i x^i \right) - \sum_{i=0}^L p_i x^i = \left(\sum_{i=L+M+1}^{\infty} b_i x^i \right) \left(\sum_{i=0}^M q_i x^i \right) \quad (\text{A.77})$$

上式の右辺のオーダーは $O(L+M+1)$ であるから、左辺も同オーダーになるべきである。ゆえに左辺の x に関して $L+M$ 次以下の項の係数は 0 である。この条件は、

$$\sum_{i=0}^k a_i q_{k-i} - p_k = 0 \text{ for } k = 0, 1, \dots, L+M \quad (\text{A.78})$$

と表される。ただし、 $p_i = 0$ ($i = L+1, \dots, L+M$)、 $q_i = 0$ ($i = M+1, \dots, L+M$) である。(A.78) は $L+M+1$ 元の連立方程式である。 $L+M+2$ 個の未知係数を一意に定められないが、未知係数の比（例えば、未知係数の q_0 に対する比）を定めることはできるので、有理関数としては一意に定められる。

Padé 近似が有効に機能する例として、関数 $y = \tanh(x)$ の近似を図 A.1 に示す。 $0 < x < 3$ の範囲では、Padé 近似式の精度は、Taylor 級数による近似式の精度を上回っている。

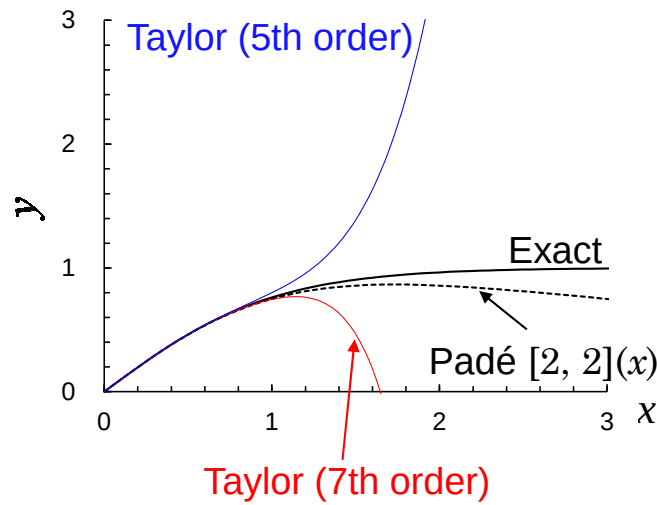


図 A.1 関数 $y = \tanh(x)$ (黒実線)、Padé 近似 $[2, 2](x)$ による近似値 (黒破線)、Taylor 級数による近似値：5 次 (青実線)、7 次 (赤実線)。

補遺 H 極限定理

補遺 H.1 ド・モアブル-ラプラスの定理

独立性、定常性、二値性を満たす試行をベルヌーイ試行とよぶ。成功する確率 p 、失敗する確率 $q = 1 - p$ のベルヌーイ試行を n 回行うとき x 回成功する確率は二項分布 $B(n, p)$ にしたがう。この確率分布関数は、

$${}_nC_x p^x q^{n-x} \quad (\text{A.79})$$

と表される。この二項分布の期待値は $\mu = np$ 、分散は $\sigma^2 = npq$ である。

この二項分布と同じ期待値 μ 、同じ分散 σ をもつ正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の確率分布関数は

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{A.80})$$

と表される。

この節では n が大きいとき、二項分布 $B(n, p)$ は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ で近似できることを学修する。すなわち

$${}_nC_x p^x q^{n-x} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad n \rightarrow \infty \quad (\text{A.81})$$

が高い精度で成り立つ。このことをド・モアブル-ラプラスの定理 (DèMoivre-Laplace limit theorem) という。これは確率論において非常に重要な結論であり、応用的にも有用であるとともに、その証明過程を体験しておくことは、ランダムに起こる複雑な現象を我々が解析できる形に落とし込む作業を追体験できるという理由で貴重である。

μ と σ とを用いて x を規格化した確率変数 u

$$u \equiv \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (\text{A.82})$$

を用いると、上記の定理は

$$\sigma {}_nC_x p^x q^{n-x} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}, \quad n \rightarrow \infty \quad (\text{A.83})$$

と表される。これを証明する。 $x = u\sigma + \mu = u\sqrt{npq} + np$ であることを用いて上式の左辺の対数を取り、それを変形していく。

$$\begin{aligned} \log \sigma {}_nC_x p^x q^{n-x} &= \log \sqrt{npq} \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} \\ &= \frac{1}{2} \log npq + \log n! - \log x! - \log(n-x)! + x \log p + (n-x) \log q. \end{aligned} \quad (\text{A.84})$$

上式の $n!$ にはスターリング近似を適用できる。また、 $n \rightarrow \infty$ のとき

$$x = np + u\sqrt{npq} = n(p + u\sqrt{pq/n}) \rightarrow \infty, \quad (\text{A.85})$$

$$n - x = n - np - u\sqrt{npq} = n\left(q - u\frac{pq}{n}\right) \rightarrow \infty, \quad (\text{A.86})$$

であることから、これら2つの量の階乗 $x!$ および $(n-x)!$ にもスターリング近似を適用できる。このことに注意すると、

$$\begin{aligned} & \log \sigma_n C_x p^x q^{n-x} \\ &= \frac{1}{2} \log npq + \left\{ \frac{1}{2} \log 2\pi + \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n - n + o(1) \right\} \\ & - \left\{ \frac{1}{2} \log 2\pi + \left(x + \frac{1}{2}\right) \log x - x + o(1) \right\} \\ & - \left\{ \frac{1}{2} \log 2\pi + \left(n - x + \frac{1}{2}\right) \log(n - x) - (n - x) + o(1) \right\} \\ & + x \log p + (n - x) \log q \\ &= -\frac{1}{2} \log 2\pi + \frac{1}{2} \log \left(p \frac{n}{x}\right) + \frac{1}{2} \log \left(q \frac{n}{n - x}\right) \\ & + x \log \left(p \frac{n}{x}\right) + (n - x) \log \left(q \frac{n}{n - x}\right) + o(1). \end{aligned} \quad (\text{A.87})$$

また、 $n \rightarrow \infty$ のときの x と n の比、および $n - x$ と n の比を評価すると、

$$\frac{x}{n} = p + u\sqrt{\frac{pq}{n}} \rightarrow 0, \quad (\text{A.88})$$

$$\frac{n - x}{n} = q - u\sqrt{\frac{pq}{n}} \rightarrow 0, \quad (\text{A.89})$$

であるから、

$$\begin{aligned} & \log \sigma_n C_x p^x q^{n-x} \\ &= -\frac{1}{2} \log 2\pi + x \log \left(p \frac{n}{x}\right) + (n - x) \log \left(q \frac{n}{n - x}\right) + o(1) \\ &= -\frac{1}{2} \log 2\pi - x \log \left(1 + u\sqrt{\frac{q}{np}}\right) - (n - x) \log \left(1 - u\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) + o(1) \end{aligned} \quad (\text{A.90})$$

となる。対数項にテーラー展開^{*2}を用いると、

$$\begin{aligned} x \log \left(1 + u \sqrt{\frac{q}{np}} \right) &= (np + u\sqrt{npq}) \left\{ u \sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{1}{2} u^2 \frac{q}{np} + O(n^{-\frac{3}{2}}) \right\} \\ &= u\sqrt{npq} + u^2 q - \frac{u^2}{2} q + O(n^{-\frac{1}{2}}) + O(n^{-1}) \\ &= u\sqrt{npq} + \frac{u^2}{2} q + O(n^{-\frac{1}{2}}), \end{aligned} \quad (\text{A.92})$$

$$\begin{aligned} (n-x) \log \left(1 - u \sqrt{\frac{q}{np}} \right) &= (nq - u\sqrt{npq}) \left\{ u \sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{1}{2} u^2 \frac{p}{nq} + O(n^{-\frac{3}{2}}) \right\} \\ &= -u\sqrt{npq} + u^2 p - \frac{u^2}{2} p + O(n^{-\frac{1}{2}}) + O(n^{-1}) \\ &= -u\sqrt{npq} + \frac{u^2}{2} p + O(n^{-\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (\text{A.93})$$

であるから、

$$\begin{aligned} \log \sigma_n C_x p^x q^{n-x} &= -\frac{1}{2} \log 2\pi - \frac{u^2}{2} (p+q) + O(n^{-\frac{1}{2}}) + o(1) \\ \rightarrow -\frac{1}{2} \log 2\pi - \frac{u^2}{2} &= \log \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \end{aligned} \quad (\text{A.94})$$

となる。よって証明された。

補遺 H.2 中心極限定理

中心極限定理 Central limit theorem は不思議に思える定理である。母集団分布が何であっても和 $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ は n が大きいとき正規分布にしたがう。この定理は重ね合わせの原理を用いる理論において正規性を仮定できる論拠となるもので、極めて重要性の高いものである。これまでに確率統計学の研究分野から複数の証明法が提唱されている。ここでは最もシンプルなモーメント母関数を用いた証明過程を確認することで、この定理が確かに定理であることと証明のための論法を学修しよう。

同一の確率分布にしたがう n 個の確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_n$ がある。ここで留意すべきは、これら n 個の変数がしたがう確率分布は同一であれば、任意の確率分布でよいという点である。

^{*2}

$$\log(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + O(X^3), \quad X \rightarrow 0 \quad (\text{A.91})$$

において、 $X = u\sqrt{\frac{q}{np}}$ 、 $X = -u\sqrt{\frac{p}{nq}}$ とおく。

$X_1, X_2, \dots, X_n$ の平均を μ 、標準偏差を σ とする。ここで次のような変換

$$Y_1 = \frac{X_1 - \mu}{\sigma}, Y_2 = \frac{X_2 - \mu}{\sigma}, \dots, Y_n = \frac{X_n - \mu}{\sigma} \quad (\text{A.95})$$

により、標準化された新たな確率変数 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ の代表値を調べる。期待値は

$$E(Y_1) = 0, E(Y_2) = 0, \dots, E(Y_n) = 0 \quad (\text{A.96})$$

である。分散は

$$V(Y_1) = 1, V(Y_2) = 1, \dots, V(Y_n) = 1 \quad (\text{A.97})$$

である。

$X_1, X_2, \dots, X_n$ は同一の確率分布にしたがうため、 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ も同一の確率分布にしたがう。よって、 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ の中のひとつを選び、そのモーメント母関数 $M_Y(t)$ を求める。(A.96)、(A.97) より

$$M_Y(t) = 1 + E(Y)t + \frac{E(Y^2)}{2!}t^2 + \dots = 1 + \frac{1}{2}t^2 \dots \quad (\text{A.98})$$

である。

$Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \equiv T$ のモーメント母関数は、 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ のモーメント母関数の積であるから、

$$M_T(t) = \{M_Y(t)\}^n = \left(1 + \frac{1}{2}t^2 + \dots\right)^n \quad (\text{A.99})$$

である。 $(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n)/\sqrt{n}$ のモーメント母関数は、上式の t を $t/\sqrt{n}$ で置き換えることで得られる。

$$M_T\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left\{M_Y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right\}^n = \left(1 + \frac{1}{2n}t^2 + \dots\right)^n \rightarrow e^{\frac{t^2}{2}} \quad (\text{A.100})$$

という風に標準正規分布 $N(0, 1)$ のモーメント母関数と等しい。よって証明された。

モーメント母関数

期待値 μ をもつ確率変数 X に対して、

$$\mu'_r(\mu) = E(X - \mu)^r \quad (\text{A.101})$$

を X の期待値まわりの r 次モーメントといい、確率分布の期待値、分散、歪度、尖度に密接に関連している。例えば、期待値と分散はそれぞれ

$$\mu_1(0) = E(X), \quad (\text{A.102})$$

$$\mu_2(\mu) = V(X) \quad (\text{A.103})$$

のように、原点まわりの 1 次モーメント、期待値まわりの 2 次モーメントである。

すべての r に対してモーメントを求めるときに便利な関数としてモーメント母関数がある。確率変数 X に対するモーメント母関数は $M_X(t)$ と表示され、定義は

$$M_X(t) \equiv E(e^{tX}) \quad (\text{A.104})$$

である。つまり、指数関数 e^{tX} の期待値である。 $M_X(t)$ の r 次導関数を計算できれば

$$M_X(0) = \mu_r \quad (\text{A.105})$$

のように、 r 次モーメントも計算できる。この理由は次の通りである。

指数関数 e^{tX} のテーラー展開式

$$e^{tX} = 1 + tX + \frac{1}{2!}(tX)^2 + \frac{1}{3!}(tX)^3 + \cdots \quad (\text{A.106})$$

の期待値は

$$M_X(t) = 1 + E(tX) + \frac{1}{2!}(t)^2 E(X^2) + \frac{1}{3!}(t)^3 E(X^3) + \cdots \quad (\text{A.107})$$

であるから (A.105) が成り立つ。

補遺 H.3 マルコフ過程

確率過程 X_n において、将来の確率変数に対する条件付き確率分布が現在の値のみに依存するとき、つまり、任意の n 、任意の状態 $j_0, j_1, \dots, j_{n-1}, j, k$ に対して

$$P(X_{n+1} = k | X_0 = j_0, X_1 = j_1, \dots, X_{n-1} = j_{n-1}, X_n = j) = P(X_{n+1} = k | X_n = j) \quad (\text{A.108})$$

が成立するとき、この確率過程をマルコフ過程 (Markov process) という。すなわち、 $X_n = j$ という状態が分かれば時刻 t_{n+1} における確率法則はそれ以前にどのような経路を経てきたかには無関係に決まる。

推薦図書

- 『船体と海洋構造物の運動学』、元良誠三監修、小山健夫、藤野正隆、前田久明共著、成山堂書店
船体や海洋構造物の運動、海洋波などが網羅的に説明されており、ちょっとした調べものに便利。
- 『船舶海洋工学シリーズ 船体運動 耐航性能編』、柏木正、岩下英嗣共著、成山堂書店
船体運動の基礎理論、水波、耐航性理論が一通り読みやすく書かれている。
- 『スペクトル解析』、日野幹雄著、朝倉書店
内容が豊富で、理論の記述が分かりやすい。座右に置いておきたいと思わせる教科書。
- 『流体力学』、巽友正著、培風館
一般的な流体力学に関する解説のほか水波について丁寧な説明がある。無数にある流体力学の教科書の中で最も好み。愛読書のひとつ。